线性代数

金融工程专业 李繁荣

第二章

矩阵及其运算

矩阵是线性代数的一个主要研究对象，也是数学上的一个重要工具。矩阵的应用已经渗透到了包括自然科学、人文科学、社会科学在内的各个领域。

主要内容

1． **矩阵的运算及其性质.**

2． **矩阵的分块.**

重点内容　**逆矩阵的计算.**

第一节　矩阵

一、矩阵概念的引入

二、矩阵的定义

三、内容小结

上完这节课我能做到

1.会表述矩阵的定义

2.会识别特殊矩阵

一、矩阵概念的引入

1、某班级同学早餐情况

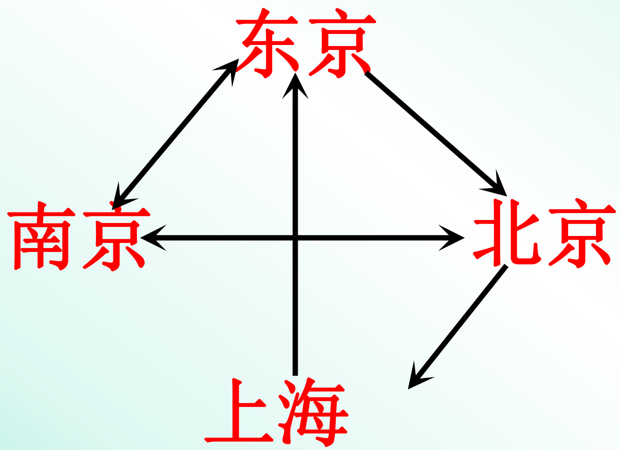
姓名	馒头	包子	鸡蛋	稀饭
周星驰	4	2	2	1
章子怡	0	1	1	1
奥巴马	4	9	8	6

为了方便，常用下面的数表表示

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

这个数表反映了学生的早餐情况.

2、某航空公司在 A，B，C，D四城市之间的航线图



为了方便，常用下面的数表表示

其中√ 表示有航班.

到站

发站

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\text{南京} & \text{东京} & \text{北京} & \text{上海}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{南京}\\ \text{东京}\\ \text{北京}\\ \text{上海}\end{array} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

为了便于计算，把表中的√ 改成1，空白地方填上0，就得到一个数表：

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

3、线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

的解取决于 $\begin{cases} \text{系数} \quad a_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n(m)\right), \\ \text{常数项} \quad b_i\left(i=1,2,\cdots,m\right) \end{cases}$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

二、矩阵的定义

定义 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

叫做一个 $m \times n$ **矩阵**, 这 $m \times n$ 个数叫做矩阵的**元素**, a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

主对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

副对角线

矩阵A的(m,n)元

简记为 $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right).$

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,

元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵,

$\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 是一个 1×1 矩阵.

- 矩阵有什么用？

行列式与矩阵的区别与联系 ：

(1) $D_{n\times n}$， $A_{m\times n}$；

(2) 数， 数表；

(3) $|\ \ |$， $(\ \ )$

(4) $A_{n\times n} \to |A| = \det A$.

单选题 1分

设置

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$为

A 3×1行列式

B 3×1矩阵

C 1×3行列式

D 1×3矩阵

提交

几种特殊矩阵：

(1) 行数与列数都等于 n 的矩阵 A，称为 n 阶**方阵**. 也可记作 A_n.

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

$|A|$ 称为方阵的行列式.

(2) 只有一行的矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

称为**行矩阵**(或**行向量**).

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为**列矩阵**(或**列向量**).

不全为0

（3）形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵，

称为**对角矩阵**（或**对角阵**）．

记作 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$

例如 $\mathrm{diag}(3,-1,2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

（4）元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m \times n$ 零矩阵记作 $O_{m\times n}$ 或 O.

注意　不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) 单位矩阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）.

n 阶单位矩阵 E 在矩阵代数中占有很重要的地位, 它的作用与 “1” 在初等代数中的作用相似. 如

$$EA = AE = A.$$

(6)数量矩阵

主对角线上的所有元素全为λ 的对角阵称为**数量阵**.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \large{0} \\ & \large{0} & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

全为λ

记作 λE.

(7) 三角矩阵

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为上三角矩阵.

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为下三角矩阵.

上三角矩阵与下三角矩阵统称为三角阵.

记作 $tria(A)$.

单选题 1分

设置

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$称为

A 三角行列式

B 对角行列式

C 三角矩阵

D 对角矩阵

提交

(8) 对称矩阵与反称矩阵

在方阵 $A=(a_{ij})_n$ 中, 如果 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 为对称矩阵. 如果 A 还是实矩阵,则称 A 为实对称矩阵. 如果 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 A 为反称矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

实对称矩阵

反对称矩阵

同型矩阵与矩阵相等的概念：

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$与$B(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称**矩阵 A 与 B 相等**,记作 $A=B$.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 两矩阵相等

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解 $\because\ A=B,$

$\therefore x=2,\ \ y=3,\ \ z=2.$

三、内容小结

(1)矩阵的概念　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m = n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 零矩阵.

作业：见雨课堂作业链接

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

二、数与矩阵相乘

三、矩阵与矩阵相乘

四、矩阵的其它运算

五、内容小结

上完这节课我能做到

1.会计算矩阵的加、减、数乘运算

2.会计算矩阵乘矩阵，并掌握其运算性质

3.会求方阵的行列式

4.会用方阵行列式的运算性质计算相关行列式的值

5.会求矩阵的伴随矩阵

某公司生产三类产品G1，G2，G3，销售给两个客户C1，C2.这些物品一月份的月销售如下表

	物品月销售			
销售给客户		G1	G2	G3
	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},$$

类似地,2月份的销售可能为$B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix},$

两个月的销售矩阵为

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7+6 & 3+2 & 4+1 \\ 1+0 & 5+4 & 6+4 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 5 & 5 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

一、矩阵的加法

1、定义

设有两个$m\times n$矩阵 $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$, 那末矩阵 A 与 B 的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

例如，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$与$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$不能相加.

2、 矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij}),$$

称为矩阵A的负矩阵.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

(5) $A+O=O+A=A$, 其中 O 与 A 是同型矩阵.

单选题 1分

设置

已知$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ 求$A-B=?$

A $\begin{vmatrix}10 & -3\\ -1 & -5\end{vmatrix}$

B $\begin{bmatrix}10 & -3\\ -1 & -5\end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix}10 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix}4 & 1\\ 5 & 5\end{bmatrix}$

提交

某公司生产三类产品G1，G2，G3，销售给两个客户C1，C2.这些物品一月份的月销售如下表

	物品月销售			
销售给客户		G1	G2	G3
	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},$$ 假设每个月的销售是相同的，则一年的销售矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}12\times 7 & 12\times 3 & 12\times 4\\ 12\times 1 & 12\times 5 & 12\times 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84 & 36 & 48\\ 12 & 60 & 72\end{pmatrix}$$

B=12A

二、数与矩阵相乘

1、定义

数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

单选题 1分

设置

已知$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，则$2A=$

A $\begin{vmatrix}6 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}$

B $\begin{bmatrix}6 & -2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix}6 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

提交

多选题 1分

设置

已知 $D=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}$，则 $2D=$

A $\begin{vmatrix}6 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}$

B $\begin{bmatrix}6 & -2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

C $\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}$

D $\begin{vmatrix}6 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}$

E $\begin{vmatrix}6 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}$

提交

2、数乘矩阵的运算规律

（设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为数）

$$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$$

$$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的**线性运算**.

例1 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

求 $2A, 2A-B$.

解

$$2A=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & 4\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$2A-B=2A+(-B)=2A+(-1)B$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & 4\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 6\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

某公司生产三类产品G1，G2，G3，三类产品分别以5元，3元，2元的价格销售给两个客户C1，C2. 这些物品的月销售如下表

	物品月销售			
销售给客户		G1	G2	G3
	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad \text{引入价格列矩阵}P=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 2\end{pmatrix},$$

$$\text{总价为}A\times P=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\times5+3\times3+4\times2\\ 1\times5+5\times3+6\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}52\\ 32\end{pmatrix}$$

某公司生产三类产品G1，G2，G3，三类产品分别以5元，3元，2元的价格销售给两个客户C1，C2. 这些物品的月销售如下表

	物品月销售			
销售给客户		G1	G2	G3
	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad \text{引入质量列矩阵}\,Q=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 2\end{pmatrix},$$

$$\text{总质量为}\,A\times Q=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\times 2+3\times 3+4\times 2\\ 1\times 2+5\times 3+6\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\ 29\end{pmatrix}$$

某公司生产三类产品G1，G2，G3，三类产品分别以5元，3元，2元的价格销售给两个客户C1，C2. 这些物品的月销售如下表

	物品月销售			
销售给客户		G1	G2	G3
	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},$$ 引入价格、质量矩阵$B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$,

总价为$A\times B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}7\times5+3\times3+4\times2 & 7\times2+3\times3+4\times2\\ 1\times5+5\times3+6\times2 & 1\times2+5\times3+6\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}52 & 31\\ 32 & 29\end{pmatrix}$$

三、矩阵与矩阵相乘

1、定义

设$A=(a_{ij})$是一个$m\times s$ 矩阵,$B=(b_{ij})$是一个$s\times n$ 矩阵，那末规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

$$(-2)\times 2+4\times(-3)=$$

例2

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

例3 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

求 AB.

解 $\because A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4},\quad B=\left(b_{ij}\right)_{4\times 3},$

$\therefore C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 3}.$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 6 & 7\\ 10 & 2 & -6\\ -2 & 17 & 10\end{pmatrix}.$$

主观题 10分

设置

已知$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 7 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}10 & -8\\ 12 & -2\end{bmatrix}$，求$AB$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

$$AB=\begin{bmatrix} 1\times10+(-3)\times12 & 1\times(-8)+(-3)\times(-2) \\ 7\times10+5\times12 & 7\times(-8)+5\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -26 & -2 \\ 130 & -66 \end{bmatrix}$$

注意　只有当第一个矩阵的**列**数**等于**第二个矩阵的**行**数时，两个矩阵才能相乘.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不存在.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}.$$

单选题 1分

设置

已知$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\\ -5 & 0\end{bmatrix}$，请思考这两个矩阵能相加吗？

A 可以

B 不可以

提交

主观题 10分

设置

已知$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

求AX, BX, CX

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

2、矩阵乘法的运算规律

$(1)\ (AB)C = A(BC);$

$(2)\ A(B+C) = AB + AC,\quad (B+C)A = BA + CA;$

$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$(4)\ AE = EA = A;$

(5) 若A是 n 阶矩阵，则 A^k 为A的 k 次幂，即

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k个}$$ 并且 $A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}$.

另外还规定： $A^0 = E.$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

故 $AB \neq BA$.

注意 矩阵乘法不满足交换律，即：

$$AB \neq BA, \ (AB)^k \neq A^k B^k.$$

$$(AB)^k = \underbrace{(AB)(AB)\cdots\cdots(AB)}_{k个} \neq A^k B^k$$

已知$A=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，求$AB,BA$

但也有例外，比如设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA.$$

此时称矩阵A,B可交换

主观题 10分

设置

$$设A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{pmatrix},求AB$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

证：

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times(-2)+1\times 2 & 1\times 1+1\times(-1)\\ (-1)\times(-2)+(-1)\times 2 & (-1)\times 1+(-1)\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=O$$

主观题 10分

设置

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix},\text{求}AC,AD$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

$$AC=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-3&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&0\\-3&0\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-3&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&0\\-3&0\end{pmatrix}$$

故 $AC=AD$

比较：

- 在数的乘法中， 若 $ab=0 \Rightarrow a=0$ 或 $b=0$

在矩阵乘法中,若 $AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

两个非零矩阵乘积可能为O。

- 在数的乘法中， 若 $ac=ad$， 且 $a\neq 0 \Rightarrow c=d$

(消去律成立)

在矩阵乘法中, 若 $AC=AD$, 且 $A\neq O \not\Rightarrow C=D$

(消去律不成立)

注意：矩阵相乘的三大特征

1、无交换律　$AB \overset{?}{=} BA$

2、无消去律　$AM = AN \overset{?}{\Longrightarrow} M = N$

3、若　$AB = O \overset{?}{\Longrightarrow} A = O \;.or.\; B = O$

3. 线性方程组的矩阵表示

设方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

简记为 $AX = B$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为由线性方程组所确定的系数矩阵，

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的右端向量。

四、矩阵的其它运算

1、转置矩阵

某公司生产三类产品G1，G2，G3，销售给两个客户C1，C2.这些物品的月销售如下表

	物品月销售			
销售给客户		G1	G2	G3
	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

四、矩阵的其它运算

1、转置矩阵

某公司生产三类产品G1，G2，G3，销售给两个客户C1，C2.这些物品的月销售如下表

物品月销售	销售给客户		
		C1	C2
	G1	7	1
	G2	3	5
	G3	4	6

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix};$$

四、矩阵的其它运算

1、转置矩阵

定义　把矩阵A的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T.

例　$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$,　$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}$,　$B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}$.

转置矩阵的运算性质

$(1)\left(A^T\right)^T = A;$

$(2)(A+B)^T = A^T + B^T;$

$(3)(\lambda A)^T = \lambda A^T;$

$(4)(AB)^T = B^T A^T.$

(5) 若 A 为 n 阶方阵, 则 $(A^m)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^m$.

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{求}\ (AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

$$\therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

2、方阵的行列式

定义　由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ 　则 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-2.$

运算性质　$(1)\ |A^T|=|A|;$　　$(2)\ |\lambda A|=\lambda^n|A|;$

$(3)\ |AB|=|A||B|;$　$\Rightarrow |AB|=|BA|.$

例如：$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{pmatrix}$，有 $|AB|=\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{vmatrix}=30$

而 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10$，$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$

所以 $|AB|=|A||B|$

推广：

$$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$$

$$|A^m|=|A|^m$$

单选题 1分

设置

设 A 为 5 阶方阵，且 $|A| = 2$，则 $|-2A| = ($　　$)$

A -4

B 4

C -64

D 64

提交

单选题 1分

设 A 为 2 阶方阵，且 $|A| = 2$，则 $\left|(2A)^3\right| = (\qquad)$

A 512

B -512

C 64

D -64

提交

填空题 1分

设置

设 A 为 2 阶方阵，且 $|A| = 2$，则 $|-3A^3| =$.

[填空1]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

伴随矩阵：

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

求方阵A的伴随矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix},$$

$$\because\quad A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,$$

$$A^*=\begin{pmatrix}-3&3&1\\-4&0&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$$

同理可求得 $A_{21}=3, A_{22}=0, A_{23}=-1, A_{31}=1,$

$A_{32}=4, A_{33}=-3.$

主观题 10分

设置

求方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

求方阵A的伴随矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\because \quad A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\left|1\right|=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\left|1\right|=-1$$

$$A_{21}=1,\ A_{22}=1$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

主观题 10分

设置

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 求$AA^{*}$和$A^{*}A$

作答

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \boldsymbol{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \\ \boldsymbol{O} & & & |A| \end{pmatrix},$$

五、内容小结

矩阵运算

- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 转置矩阵
- 方阵的行列式
- 对称阵与伴随矩阵
- 共轭矩阵

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘,且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

作业：见雨课堂作业链接

第三节　逆矩阵

一、概念的引入

二、逆矩阵的概念和性质

三、逆矩阵的求法

四、矩阵多项式

五、内容小结

上完这节课我能做到

1.会判断一个矩阵是否可逆

3.会求可逆矩阵的逆矩阵

4.会运用逆矩阵的性质求相关矩阵的逆矩阵

5.会用逆矩阵求线性方程组的解

一、概念的引入

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为a 的倒数,（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中,单位阵E相当于数的乘法运算中的1，那么，对于矩阵A ,如果存在一个矩阵A^{-1},

使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}称为A 的可逆矩阵或逆阵.

例　设　$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix},$

$\because AB=BA=E,\quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

二、逆矩阵的概念和性质

定义　对于n 阶矩阵A，如果有一个n 阶矩阵B，使得

$$AB=BA=E,$$

则说矩阵A是**可逆**的，并把矩阵B称为A的**逆矩阵**.

A的逆矩阵记作 A^{-1}.

只有方阵才有逆矩阵

对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=BA$$

$$B=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

一般 设 $a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn} \neq 0$,

由于:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

现在的问题是：

1.矩阵 A 满足什么条件时可逆？

2.可逆矩阵的逆矩阵是否唯一，如何求逆矩阵？

3.可逆矩阵有什么性质？

这是本节要讨论的问题.

定理1 若A 是可逆矩阵，则A 的逆矩阵是唯一的.

证明 若设 B 和 C 是A 的可逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的,即

$$B = C = A^{-1}.$$

伴随矩阵：

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

性质 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E.$

定理2　矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*},$$

其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.

证明：当$|A| \neq 0$时，

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E,$$

按逆矩阵的定义得

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

证毕

奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A| = 0$时，A称为奇异矩阵，当$|A| \neq 0$时，A称为非奇异矩阵．

由此可得A是可逆阵的充要条件是A为非奇异矩阵．

推论 若 $AB=E$（或 $BA=E$），则 $B=A^{-1}$.

证明 $|A|\cdot|B|=|E|=1$, 故 $|A|\neq 0$,

因而 A^{-1} 存在, 于是

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}(AB)$$

$$=A^{-1}E=A^{-1}.$$

证毕

方阵求逆矩阵的步骤

- **1**、计算方阵的行列式 $|A|$。
- **2**、判断逆矩阵是否存在。$|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$
- **3**、计算方阵的伴随矩阵 A^*。
- **4**、根据公式 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 给出方阵的逆矩阵。

求方阵A的逆矩阵 A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

$$|A|=2$$

$$\because\quad A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|1|=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|1|=-1$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{21}=1,\ A_{22}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$\because AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2+1/2 & 1/2-1/2\\ 1/2-1/2 & 1/2+1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$BA=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2+1/2 & -1/2+1/2\\ -1/2+1/2 & 1/2+1/2\end{pmatrix}=I,$$

$\therefore$ B是A的一个逆矩阵.

三、逆矩阵的求法

例　求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆阵

解　因为$|A|=ad-bc$,

$$A_{11}=d,\ A_{12}=-c,\ A_{21}=-b,\ A_{22}=a.$$

所以

$$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

所以当$|A|\neq 0$时, 有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

主观题 10分

设置

求方阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

求方阵P的逆矩阵 P^{-1}

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$|P|=2, P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

例3　求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解　$\because \ |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0,$ $\therefore \ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2, \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

主观题 10分

设置

判定矩阵A是否可逆？若可逆，求出其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例4 下列矩阵A, B是否可逆?若可逆,求出其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & -11\end{pmatrix}.$$

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0,\ \text{所以}A\text{可逆}.$$

$$\because\quad A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5,$$

同理可求得 $A_{21}=3, A_{22}=0, A_{23}=-1, A_{31}=1,$

$$A_{32}=4, A_{33}=-3.$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{vmatrix} = 0$, 故$B$不可逆.

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明 $$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}$$
$$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$
$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

$(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$, m 为正整数.

(4)若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

证明 $\because\ A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E,$

$\therefore\ \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

另外, 当$|A|\neq 0$时,定义

$$A^0=E,\quad A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^k.$$

(5) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1} = E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1$

因此 $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

单选题 1分

设置

设 A、B 均为 n 阶可逆矩阵，且数 $a\neq 0$，则下列命题错误的是（ ）

A $(A)^{-1}(B)^{-1}=(AB)^{-1}$

B $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

C $(aA)^{-1}=\frac{1}{a}A^{-1}$

D $(B^{-1})^{T}=(B^{T})^{-1}$

提交

单选题 1分

设置

设 A 为可逆矩阵，则下列等式中不正确的是（　　）

A $(2A)^T=2A^T$

B $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

C $(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$

D $(2A)^{-1}=2A^{-1}$

提交

填空题 1分

设置

设 A 是方阵，且 $|A| = 7$，则 $|A^{-1}| =$ [填空1]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

填空题 1分

设置

设 A 为 2 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $|2A^{-1}|$ 的值为

[填空1]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

填空题　1分

设置

设 A 为 3 阶方阵，且 $|A| = 3$，则 $\left|\left(-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right| =$

[填空1]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

单选题 1分

设置

A,B,C为n阶方阵，且$ABC=E$，则$B^{-1}=$（ ）

A AC

B CA

C $C^{-1}A^{-1}$

D $A^{-1}C^{-1}$

提交

逆矩阵的应用：

1. 解线性方程组

设方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可表示为
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

简记为 $AX=B$ 若 $|A|\neq 0$，A^{-1}存在，则 $X=A^{-1}B$

例5 解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=3 \end{cases}$

解：方程组简记为 $AX=B$

其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$

由于 $|A|=2\neq 0$, A可逆，故

$$X=A^{-1}B$$

而 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$\therefore X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{x_1=-8,\ \ x_2=9,\ \ x_3=-3.}$

求矩阵X

$$AX=B, A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2 解矩阵方程

例6　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$

求矩阵X使满足 $AXB=C.$

解　$\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

E

$$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

注意: ①由于矩阵乘法不满足交换律,用矩阵A^{-1}乘方程AXB=C两边时,必须同时在左边乘.

②对于高阶矩阵 A ,用伴随矩阵法求A^{-1}是比较麻烦的.

例4　设方阵A满足方程$A^2 - A - 2E = 0$,证明：$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明　由$A^2 - A - 2E = 0$,

A^{-1}

$$得A(A-E) = 2E \Rightarrow A\frac{A-E}{2} = E$$

$$\Rightarrow |A|\left|\frac{A-E}{2}\right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0,\ 故A可逆.$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E).$$

又由$A^2-A-2E=0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

$(A+2E)^{-1}$

$$\Rightarrow |A+2E|\left|-\frac{1}{4}(A-3E)\right|=1,$$

故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3E)=\dfrac{3E-A}{4}$.

单选题 1分

设置

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-5A+7E=0$，则 $A^{-1}=$

A $-\dfrac{A-5E}{7}$

B $-\dfrac{A-5}{7}$

C 2E-A

D A+2E

提交

求方阵A的逆矩阵 A^{-1}　A^2　A^3　A^n

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}.$$

$$A^2=\begin{pmatrix}4^2&0&0\\0&2^2&0\\0&0&3^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3=\begin{pmatrix}4^3&0&0\\0&2^3&0\\0&0&3^3\end{pmatrix}.$$

$$A^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}.$$

* 四、矩阵多项式(选讲)

1. 定义

设 $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 为 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶方阵，记

$$\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m,$$

$\varphi(A)$ 称为**矩阵 A 的 m 次多项式**.

2. 性质

因为矩阵 A^k、 A^l 和 E 都是可交换的，所以矩阵 A 的两个多项式 $\varphi(A)$ 和 $f(A)$ 总是可交换的，即总有

$$\varphi(A)f(A) = f(A)\varphi(A),$$

从而 A 的多项式可以像数 x 的多项式一样相乘或分解因式. 例如

$$(E+A)(2E-A) = 2E + A - A^2,$$

$$(E-A)^3 = E - 3A + 3A^2 - A^3.$$

3. 计算方法

（1）如果 $A = P\Lambda P^{-1}$，则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$，从而

$$\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

$$= Pa_0EP^{-1} + Pa_1\Lambda P^{-1} + \cdots + Pa_m\Lambda^m P^{-1}$$

$$= P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

（2）如果 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$为对角矩阵，

则，$\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$，从而

$$\varphi(\boldsymbol{\Lambda}) = a_0 \boldsymbol{E} + a_1 \boldsymbol{\Lambda} + \cdots + a_m \boldsymbol{\Lambda}^m$$

$$= a_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + a_m \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

例　设 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, AP=P\Lambda$，求 A^n

解
$$|P|=2, P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$A=P\Lambda P^{-1}, A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1},\cdots,A^n=P\Lambda^nP^{-1},$$

而
$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\quad \Lambda^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix},$$

$$\cdots,\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix},$$

故

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4-2^{n+1} & 2^{n+1}-2 \\ 4-2^{n+2} & 2^{n+2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

练习题

$P^{-1}AP=B$，其中 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，$A^3=$ ________

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^3 & 0\\ 0 & (-2)^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}40 & -32\\ 48 & -40\end{pmatrix}$$

思考题

若A可逆,那么矩阵方程 $AX = B$是否有唯一解 $X = A^{-1}B$? 矩阵方程 $YA = B$ 是否有唯一解 $Y = BA^{-1}$?

思考题解答

答　是的.这是由于 A^{-1}的唯一性决定的 .

五、内容小结

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

逆矩阵的计算方法

(1)待定系数法；(2)利用公式 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$；

(3)初等变换法(下一章介绍).

作业：见雨课堂作业链接

第 四节　　克拉默法则

一、克拉默法则

二、重要定理

三、内容小结

上完这节课我能做到

1. 会用克拉默法则求线性方程组的解

2.会用线性方程组解的定理判定线性方程组的解

一、克莱姆法则

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，　　方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意　分母都为原方程组的系数行列式.

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

例　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解　由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，此时称方程组为**齐次线性方程组**.

一、克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

主观题 10分

设置

用克拉默则求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

作答

例 用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 6 + 4 = -8 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$(x_1, \quad x_2, \quad x_3)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{D_1}{D}, \quad \frac{D_2}{D}, \quad \frac{D_3}{D} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$= \left(-\frac{11}{8}, \quad -\frac{9}{8}, \quad -\frac{3}{4} \right)^{\mathrm{T}}$$

注意：通过上述例子，我们看到用克拉默法则求解线性方程组时，要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，这个计算量是相当大的，所以，在具体求解线性方程组时，很少用克拉默法则，但经济中经常出现的情况是，变量中仅有几个是实际需要的，尤其是当其余变量的值不需要时，克莱姆法则就更简便。

另外，当方程组中方程的个数与未知量的个数**不等**时，就不能用克拉默法则求解.

克拉默法则不仅给出了方程组有唯一解的条件，并且给出了方程组的解与方程组的系数和常数项的关系.

二、重要定理

定理1 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$, 则 (1)一定有解, 且解是唯一的 .

定理1′ 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零. (逆否命题)

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

定理2　如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 只有一组零解.

定理2′　如果齐次线性方程组(2)有非零解, 则它的系数行列式必为零 $D = 0$. (逆否命题)

反之: 以后将证明：若系数行列式 $D=0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解.

例 齐次方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$

有非零解，问λ取何值时？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\2 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\2 & 1-\lambda & 1\\1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda-3 & (\lambda-1)(1-\lambda)+4\\2 & 1-\lambda & 2(\lambda-1)+1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -\lambda^2 + 2\lambda + 3 \\ 1 - \lambda & 2\lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)\begin{vmatrix} 1 & -(\lambda + 1) \\ 1 - \lambda & 2\lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \lambda & 2\lambda - \lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(2\lambda - \lambda^2)$$

$$= -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

齐次方程组有非零解，则 $D = 0$

$\lambda = 0$,或$\lambda = 2$ 或$\lambda = 3$ 时齐次方程组有非零解.

单选题 1分

设置

设齐次线性方程组$\begin{cases} kx \qquad +z=0 \\ 2x+ky+z=0 \\ kx-2y+z=0 \end{cases}$有非零解，则k =

A 2

B 0

C -1

D -2

提交

单选题 1分

设置

当a为________时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$有非零解.

A 1

B 2

C 1或2

D 1或2或3

提交

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时,能否用克拉默法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何?

思考题解答

不能,此时方程组的解为无解或有无穷多解.

三、内容小结

1. **用克拉默法则解方程组的两个条件**

(1) 方程个数等于未知量个数;

(2) 系数行列式不等于零.

2. **克拉默法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系. 它主要适用于理论推导.**

第四节　矩阵分块法

- 一、矩阵的分块
- 二、分块矩阵的运算法则
- 三、小结　思考题

上完这节课我能做到

会求分块对角阵的行列式与逆阵

一、矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & b & 1\\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O\\ E & B \end{pmatrix},$$ 其中

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & b & 1\\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$ 其中

二、分块矩阵的运算规则

(1) 设矩阵 A 与 B 的行数相同，列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同，列数相同，那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数,那末

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

例 $\lambda = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$2A = \begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 & 3\times 2 \\ 3\times 2 & 2\times 2 & 1\times 2 \\ 4\times 2 & 5\times 2 & 6\times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

(3) 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数, 那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots\cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots\cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对 角线上有非零子块 ,其余子块都为零矩阵 ,且非零子块都是方阵 .即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵，那末称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

(6)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $\left|A_i\right| \neq 0(i=1,2,\cdots,s)$,则$|A| \neq 0$,并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(7)\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

例2　设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B,\qquad ABA.$

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$ABA=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 \\ a^2 & a^3+a \end{pmatrix},$$

$$A_2B_2A_2=\begin{pmatrix} b^3+2b & 2b^2+1 \\ 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore ABA = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 A_1 & 0 \\ 0 & A_2 B_2 A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 + a & 2a^2 + 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3 + a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 + 2b & 2b^2 + 1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3 + 2b \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\ \hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $\quad A_1^{-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)$; $\quad A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$,

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix}; \qquad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

三、小结

在矩阵理论的研究中,矩阵的分块是一种最基本,最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

(1) 加法　同型矩阵 ,采用相同的分块法

(2) 数乘　数k乘矩阵A,需k乘A的每个子块

(3) 乘法

若A与B相乘,需A的列的划分与B的划分相一致

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & O & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

A可逆 $\Leftrightarrow A_i$可逆$i=1,2,\cdots,s$且

$$A^{-1}=diag\left(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1}\right).$$

作业：见雨课堂作业链接

第一节　矩阵的初等变换

- 一、消元法解线性方程组
- 二、矩阵的初等变换
- 三、小结　思考题

上完这节课我能做到

1.会判断矩阵是否为行阶梯型矩阵、行最简型矩阵

2.会用初等变换化矩阵为行阶梯型矩阵、行最简型矩阵

本章先讨论矩阵的初等变换，建立矩阵的秩的概念, 并提出求秩的有效方法．再利用矩阵的秩反过来研究齐次线性方程组有非零解的充分必要条件和非齐次线性方程组有解的充分必要条件，并介绍用初等变换解线性方程组的方法．内容丰富，难度较大.

一、消元法解线性方程组

分析：用消元法解下列方程组的过程.

引例 求解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\
4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \div 2 \\
3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④
\end{cases}
\qquad (1)
$$

解

(1) $\xrightarrow[\text{③}\div 2]{\text{①}\leftrightarrow\text{②}}\begin{cases} \cancel{x_1+x_2-2x_3+x_4=4,} & \text{①} \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=2, & \text{②} \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2, & \text{③} \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9, & \text{④} \end{cases} \quad (B_1)$

$\xrightarrow[\text{④}-3\text{①}]{\substack{\text{②}-\text{③} \\ \text{③}-2\text{①}}}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4, & \text{①} \\ \cancel{2x_2-2x_3+2x_4=0,} & \text{②} \\ -5x_2+5x_3-3x_4=-6, & \text{③} \\ 3x_2-3x_3+4x_4=-3, & \text{④} \end{cases} \quad (B_2)$

$$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{② \times \frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3, & ④ \end{cases} \quad (B_3)$$

$$\xrightarrow[④-2③]{③ \leftrightarrow ④} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0, & ④ \end{cases} \quad (B_4)$$

用"回代"的方法求出解：

于是解得 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 其中x_3为任意取值.

或令$x_3 = c$,方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{即} x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中c为任意常数.

小结：

1．上述解方程组的方法称为消元法.

2．始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换

（1）交换方程次序；

（ ⓘ与ⓙ相互替换）

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（以 ⓘ$\times k$ 替换ⓘ）

（3）一个方程加上另一个方程的k倍.

（以 ⓘ$+k$ⓙ 替换ⓘ）

3．上述三种变换都是可逆的.

$$若(A)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ}(B)，则(B)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ}(A);$$

$$若(A)\xrightarrow{ⓘ\times k}(B)，则(B)\xrightarrow{ⓘ\div k}(A);$$

$$若(A)\xrightarrow{ⓘ+kⓙ}(B)，则(B)\xrightarrow{ⓘ-kⓙ}(A).$$

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换.

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算.

若记

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

则对方程组的变换完全可以转换为对矩阵B(方程组（1）的增广矩阵）的变换.

二、矩阵的初等变换（Elementary Transformation）

定义1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调两行（对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素 ；

（第 i 行乘 k, 记作 $r_i \times k$）

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$）.

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“r”换成“c”).

定义2　矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$　逆变换　$r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i \times k$　逆变换　$r_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $r_i \div k$;

$r_i + kr_j$　逆变换　$r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \sim B$.

等价关系的性质：

（1） 反身性　$A \Leftrightarrow A$;

（2）对称性 若 $A \Leftrightarrow B$,则 $B \Leftrightarrow A$;

（3）传递性 若 $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$,则 $A \Leftrightarrow C$.

具有上述三条性质的关系称为等价.

例如，两个线性方程组同解，

就称这两个线性方程组等价

用矩阵的初等行变换 解方程组（1）：

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \div 2}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2 \div 2 \\ r_3+5r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_4 - 2r_3}{\overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

B_5 对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$

或令$x_3 = c$,方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中c为任意常数 .

矩阵 B_4 和 B_5 都称为行阶梯形矩阵.

特点：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

（1）、可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

（2）、每个台阶只有一行，

台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元.

矩阵 B_4 和 B_5 都称为行阶梯形矩阵.

行阶梯形矩阵B_5还称为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

特点：

（1）非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其他元素都为0.

（2）这些非零元所在列的其他元素都为0.

行阶梯形矩阵B_5还称为行最简形矩阵，即非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其他元素都为0.

对于任何矩阵$A_{m\times n}$,总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形和行最简形.

注意：行最简形矩阵是由方程组唯一确定的，行阶梯形矩阵的非零行数也是由方程组唯一确定的.

单选题 1分

设置

判断下面的矩阵是否为阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A 是

B 不是

提交

单选题 1分

设置

判断下面的矩阵是否为阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A 是

B 不是

提交

单选题 1分

设置

判断下面的矩阵是否为阶最简型矩阵

$$A_2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

A 是

B 不是

提交

单选题 1分

设置

判断下面的矩阵是否为阶最简型矩阵

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 是

B 不是

提交

化矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ 为行阶梯形矩阵

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

主观题 10分

设置

化矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 为行阶梯形矩阵

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

化矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 为行阶梯形矩阵

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ 的行最简形矩阵。

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主观题 10分

设置

求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ 的行最简形矩阵。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ 的行最简形矩阵。

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

三、小结

1. 初等行(列)变换 $\begin{cases} (1) r_i \leftrightarrow r_j \left(c_i \leftrightarrow c_j\right); \\ (2) r_i \times k \left(c_i \times k\right); \\ (3) r_i + k r_j \left(c_i + k c_j\right). \end{cases}$

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

2. $A \xrightarrow{\text{初等变换}} B \Rightarrow A \sim B.$

3. 矩阵等价具有的性质

(1)反身性； (2)对称性； (3)传递性.

作业：见雨课堂作业链接

第一节　矩阵的初等变换

上完这节课我能做到

1.会用初等行变换求可逆矩阵的逆矩阵

2.会用初等行变换求线性方程组的解

一、初等矩阵的概念

矩阵的初等变换是矩阵的一种基本运算，应用广泛.

定义　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} 1.\ \text{对调两行或两列;} \\ 2.\ \text{以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行或某列;} \\ 3.\ \text{以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去.} \end{cases}$$

例如 $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{r_1+4r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

观察:

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

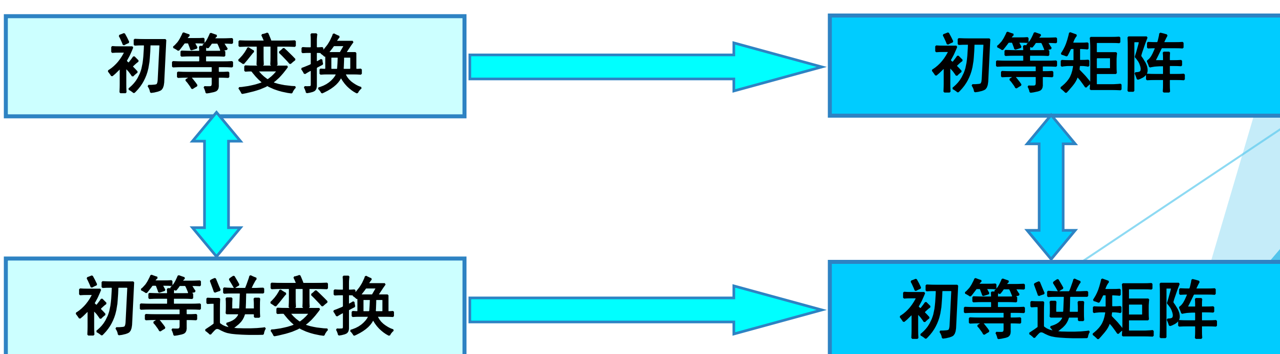
$$(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

初等矩阵的应用

定理1 设A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

左乘行变,右乘列变



定理2 设A为可逆方阵，则存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使$A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

证 $\because A \sim E$, 故 E 经有限次初等变换可变 A,

即存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$, 使

$$P_1 P_2 \cdots P_r E P_{r+1} \cdots P_l = A$$

即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l .$$

推论 $m \times n$ 矩阵 $A \sim B$ 的充分必要条件是：存在 m 阶可逆方阵 P 及 n 阶可逆方阵 Q, 使 $PAQ = B$.

利用初等变换求逆阵的方法：

当$|A| \neq 0$时，由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，有

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E，及 \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1},$$

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} \left(A \,\vdots\, E \right)$$

$$= \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \,\vdots\, P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E \right)$$

$$= \left(E \,\vdots\, A^{-1} \right)$$

亍变换，

$$(A \,\vdots\, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \,\vdots\, A^{-1})$$

当 $^{-1}$.

利用初等变换求逆阵的方法：

当$|A|\neq 0$时，由 $A = P_1P_2\cdots P_l$，有

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\ \ E)$ 施行初等行变换，

当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$$

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解
$$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3}$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

练习：求下列矩阵的逆矩阵

（1）$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ （2）$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(1) A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$(2) B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

作答

$$\text{设}A=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{pmatrix},\ \text{求}A^{-1}.$$

解

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{r_1+r_2\\r_1+r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&1&1\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{r_2-3r_1\\r_3+2r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&1&1\\0&-3&1&-3&-2&-3\\0&5&-2&2&2&3\end{array}\right)\underset{\substack{r_2\times2\\r_2+r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&1&1\\0&-1&0&-4&-2&-3\\0&5&-2&2&2&3\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3+5r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&1&1\\0&-1&0&-4&-2&-3\\0&0&-2&-18&-8&-12\end{array}\right)\underset{\substack{r_2\times(-1)\\r_3\div(-2)}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&1&1\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{r_1-r_2\\r_1-r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right),$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{pmatrix}.$

利用初等行变换求逆阵 的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \,\vdots\, B) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

即

$$(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \quad \boxed{A^{-1}B})$$

例２ 求矩阵 X,使 $AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

$$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \div (-1)}{\overset{r_2 \div (-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

三、小结

1. **单位矩阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 初等矩阵.**

2. **利用初等变换求逆阵的步骤是:**

(1) 构造矩阵 $(A \vdots E)$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$;

(2) 对 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换, 将 A 化为单位矩阵 E 后, 右边 E 对应部分即为 A^{-1}

作业：见雨课堂作业链接

第二节　矩阵的秩

- 一、矩阵秩的概念
- 二、矩阵秩的求法
- 三、小结　思考题

上完这节课我能做到

1.会表述矩阵秩的定义

2.会用初等变换化矩阵为行阶梯型矩阵法求矩阵的秩

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

一、矩阵秩的概念

任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行 变换把它变为行阶 梯形，行阶梯形矩阵中非零行的行数是唯一确定的．

矩阵的秩

定义1 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m$，$k\le n$），位于这些行列交叉 处的个 k^2 元素,不改变它们在 A 中所处的位置次序而得 的k阶行列式,称为矩阵 A 的 k 阶子式.

如：矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

取第1行、第3行和第1列、第4列交叉处的元素，组成的

二阶子式是 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=12$

易见 A 的最高阶子式是3阶，共有4个3阶子式.

而在这个矩阵中，

$$(-9) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

都是矩阵 A 的子矩阵.

例如： $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

例如： $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 三阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

注：

(1) A 的每个元素 a_{ij} 都是 A 的一个一阶子式

(2) 当 A 为 n 阶方阵时，n 阶子式即为 $|A|$

$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \bullet C_n^k$ 个.

定义2　设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 k 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵A的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.并规定零矩阵的秩等于零.

$m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数.

对于 A^T，显有 $R(A^T) = R(A)$.

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解 在 A 中，$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$

又 $\because$ A 的 3 阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$，

$\therefore\quad R(A)=2.$

单选题 1分

设置

设 A 是 5×6 阶矩阵，则下列命题中正确的是（ ）

A 若 $R(A)=4$，则 A 中 5 阶子式都为 0

B 若 $R(A)=4$，则 A 中 4 阶子式都不为 0

C 若 A 中所有 5 阶子式都为 0，则 $R(A)=4$

D 若 A 中存在不为 0 的 4 阶子式，则 $R(A)=4$

提交

例2 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵， 其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$ $\therefore$ $R(B)=3.$

行阶梯形矩阵的秩等于非零行的行数.

例3 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0,$ 计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}=0,$$

$=0.$ $\qquad \therefore R(A)=2.$

另解 对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 做初等变换，

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然，非零行的行数为2，

此方法简单！

$\therefore R(A)=2.$

行阶梯形矩阵的秩等于非零行的行数.

二、矩阵秩的求法

因为对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把他变为行阶 梯形.

问题：经过变换矩阵的秩变吗？

定理1　若 $A \sim B$，则 $R(A)=R(B)$.

方法：把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

单选题 1分

设置

A为 3 阶方阵，且$R(A)=2$，则与A等价的矩阵是（ ）

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

提交

初等变换求矩阵秩的方法：

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩.

解 对A作初等行变换，变成行 阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{-4} & \cancel{-1} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_4}{\overset{r_1\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{-4} & \cancel{-1} & \cancel{4}\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-4r_2}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A)=3.$

例5 设$A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

求矩阵 A 及矩阵 $B=(A|b)$ 的秩．

解 分析：设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$，

则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，

故从 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$ 中可同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4 - 3r_1}{\overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{r_2\div 2\\ r_3-r_2}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 5}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2,\quad R(B)=3.$$

主观题 10分

设置

练习： 将下列矩阵利用初等行变换化为行阶梯形，再化为行最简形，并求其秩.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2\div 2\\ r_3+5r_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_1$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_2$$

B_1，B_2 依次为行阶梯形和行最简形矩阵。

秩显然为３.

单选题 1分

设置

设 A 为 4 阶方阵，且 A 中的元素全是 5，则 $R(A)$ = （　　）

A　0

B　1

C　4

D　5

提交

单选题 1分

设置

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 8 & a-1 & 2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，则 $a\neq$

A 1

B -1

C 0

D 2

提交

三、矩阵秩的性质

矩阵的秩有以下性质：

（1） $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{ m , n \}$.

（2） $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

（3） 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

（4） 若 P，Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$.

（5） $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,

特别地，当 $B = b$ 为列向量时，有

$R(A) \le R(A, b) \le R(A) + 1$.

（6） $R(A + B) \le R(A) + R(B)$.

（7） $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

（8）若 $A_{m\times n} B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \le n$.

三、矩阵秩的性质

定理 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$|A|=0 \Leftrightarrow R(A)<n\,;$$ （降秩矩阵）

$$\left(\ |A|\neq 0 \Leftrightarrow R(A)=n\ \right)$$ （满秩矩阵）

若A为n阶可逆矩阵,则

(1) A的最高阶非零子式为$|A|$;

(2) $R(A)=n$;

(3) $A \sim E$;

(4) A为满秩矩阵;

(5) A为非奇异矩阵。

例. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\2&3&1\end{pmatrix}$ 判断A是否可逆.

解法1：因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\2&3&1\end{vmatrix}=5\neq 0$, 所以，$A$满秩(可逆).

解法2：用初等行变换将A化成行阶梯形矩阵，得

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\0&0&-5/2\end{pmatrix}$$

所以$r(A)$=3，A满秩，故A可逆.

填空题 1分

设置

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，且 A 的秩 $R(A)=2$，则 $a=$ [填空1]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

小结

1. 矩阵秩的概念

2. 求矩阵秩的方法

(1) 利用定义

(即寻找矩阵中非零子式的最高阶数);

(2) 初等变换法

(把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩).

作业：见雨课堂作业链接

第三节 线性方程组的解

一、线性方程组有解的判定条件

二、线性方程组的解法

三、小结

上完这节课我能做到

1.会用初等变换化矩阵为

行阶梯型矩阵、行最简型矩阵法求解线性方程组

2.会表述齐次、非齐次线性方程组解的定理

3.会用线性方程组解的定理对未知参数讨论，确定线性方程组的解

齐次线性方程组的解

例　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

1.当R(A)=n时,方程组只有零解

例 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

2.当R(A)<n时,方程组有非零解，且方程组有n-r个自由未知量,因此有无数多个解.

$$\xrightarrow[r_2\div(-3)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

说明什么问题？

说明第3个方程是多余的！

行最简形矩阵

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_3-\dfrac{5}{3}x_4=0,\\ x_2+2x_3+\dfrac{4}{3}x_4=0,\end{cases}$$

由此即得 $$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4, \end{cases}$$ (x_3, x_4 可任意取值).

(称 x_3, x_4 自由未知量).

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \end{cases}$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，把它写成通常的参数 形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + \frac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_1 - \frac{4}{3}c_2, \\ x_3 = 1c_1 + 0c_2, \\ x_4 = 0c_1 + 1c_2, \end{cases}$$

即原方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(参数 c_1, c_2 可取任意实数)

齐次线性方程组有解的判定条件:

1. 当R(A)=n时,方程组(1)只有零解,

2. 当R(A)<n时,方程组(1)有非零解,

且方程组有n-r个自由未知量,因此有无数多个解.

推论: 当 $m < n$ 时，齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$一定有非零解.

单选题 1分

设置

线性方程组$AX=0$,若A是3×4阶方阵，则该方程组

A 无解

B 有唯一零解

C 有无穷多解

D A,B,C都不成立

提交

例 求解齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵A进行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $r(A)=2<4$, 故方程组有非零解，且有

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1x_2 + 1x_4 \\ x_2 = 1x_2 + 0x_4 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 \\ x_4 = 0x_2 + 1x_4 \end{cases}$$

为什么选 x_1, x_3
为非自由未知量？

由 $$\begin{cases} x_1 = 1x_2 + 1x_4 \\ x_2 = 1x_2 + 0x_4 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 \\ x_4 = 0x_2 + 1x_4 \end{cases}$$

得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (x_2, x_4 \in R)$$

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{cases} \qquad (1)$$

(1) 式可以写成以向量 x 为未知元的向量方程

$$Ax = b\,, \quad (2)$$

以后线性方程组 (1) 与向量方程 (2) 将混同使用而不加区分，解与解向量的名称亦不加区别.

利用系数矩阵 A 和增广矩阵 $B = (A, b)$ 的**秩**，可方便地讨论线性方程**是否有解**，以及有解时**解是否唯一**等问题.

例　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&2\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

说明什么问题？

第3行表示矛盾方程0=3

n 元线性方程组 $Ax=b$

(i) 无解的充要条件是 $R(A)<R(A，b)$；

例　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&6\\2&-1&3&9\\1&2&-3&-4\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&-3&1&-3\\0&1&-4&-10\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+3r_2}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&1&-4&-10\\0&0&-11&-33\end{pmatrix}\underset{\substack{r_1-r_3\\r_1-r_2}}{\overset{\substack{r_3\div(-11)\\r_2+4r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

化为行最简形矩阵

行最简形矩阵

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3\end{cases}$$

n 元线性方程组 $Ax=b$

(ii) 有唯一解的充要条件是 $R(A)=R(A，b)=n$；

例 求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2+4x_3=-5 \\ 3x_1+8x_2-2x_3=13 \end{cases}$$

$$B=(A\,|\,b)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-14r_2]{r_2\div 7}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

说明什么问题？

说明第3个方程是多余的！

行最简形矩阵

为什么选 x_1, x_2 为非自由未知量？

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_3=-1\\x_2-x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_3-1\\x_2=x_3+2\\x_3=x_3\end{cases}$$

(称 x_3 为**自由未知量**).

n 元线性方程组 $Ax=b$

(iii) 有无穷多解的充要条件是 $R(A)=R(A,\ b)<n$.

二、线性方程组有解的条件

定理 n 元线性方程组 $Ax=b$

(i) 无解的充要条件是 $R(A)<R(A，b)$；

(ii) 有唯一解的充要条件是

$$R(A)=R(A，b)=n\ ;$$

(iii) 有无穷多解的充要条件是

$$R(A)=R(A，b)<n\ .$$

单选题 1分

设 A 为 5×4 阶矩阵，b 为 5×1 阶非零矩阵，方程组 $AX=b$ 有唯一一解，则

A $R(A)=R(A,\ b)=4$

B $R(A)\ <4$

C $R(A,\ b)<4$

D $R(A)=4$

提交

三、线性方程组的求解步骤

步骤 1 对于非齐次线性方程组，把它的增广矩阵 B 化成行阶梯形，从中可同时看出 $R(A)$ 和 $R(B)$. 若 $R(A) < R(B)$ ，则方程组无解.

步骤 2 若 $R(A) = R(B)$ ，则进一步把 B 化成行最简形. 而对于齐次线性方程组，则把系数矩阵 A 化成行最简形.

步骤 3 设 $R(A)=R(B)=r$，把行最简形中 r 个非零行的非零首元所对应的未知量取作非自由未知量，其余 $n-r$ 个未知量取作自由未知量，并令自由未知量分别等于 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$，由 B (或 A) 的行最简形，即可写出含 $n-r$ 个参数的通解.

主观题 10分

设置

求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

作答

例　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解　对增广矩阵B进行初等变换

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$R(A)=R(B)=2$, 故方程组有解，且有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 + 0x_4 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = 0x_2 + x_4 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中$\boldsymbol{x_2, x_4}$任意.

填空题 1分

设置

若线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1 \\ 2x_2-x_3=2 \\ \lambda x_3=\lambda+2 \end{cases}$无解，则$\lambda=$

[填空1]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

例 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)\ x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)\ x_3=\lambda\end{cases}$$

问λ取何值时,方程组有唯一解?无解？有无穷多个解?

解 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等行变换，

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}
$$

(1) 当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq 3$时,$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解

(2) 当λ=0时,$R(A)=1$，$R(B)=,2$，方程组无解

(3) 当λ=-3时,$R(A)=R(B)=2$，方程组有无限多个解

主观题 10分

设置

设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问λ取何值时,有解?有无穷多个解?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例 设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问λ取何值时,有解?有无穷多个解?

解 对增广矩阵 $B=(A,b)$ 作初等行变换,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \lambda & \lambda^2 \\ \mathbf{0} & \lambda-\mathbf{1} & \mathbf{1}-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2}-\lambda-\lambda^2 & \mathbf{1}+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \lambda & \lambda^2 \\ \mathbf{0} & \lambda-\mathbf{1} & \mathbf{1}-\lambda & \lambda(\mathbf{1}-\lambda) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{1}-\lambda)(\mathbf{2}+\lambda) & (\mathbf{1}-\lambda)(\mathbf{1}+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

1) $\lambda \neq 1$， 且$\lambda \neq -2$时, $R(A)=R(B)=3$, 方程组有唯一解

2） 当$\lambda = 1$时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(B) < 3$,方程组有无穷多解 .

其通解为 $$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$(x_2, x_3$为任意实数 $)$.

3) $\lambda = -2$时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$R(A) \neq R(B)$,故方程组无解.

五、两个基本定理

由**定理3**容易得出线性方程组理论中两个最基本的定理.

定理 4 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $R(A) < n$.

推论 当 $m < n$ 时，齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 一定有非零解.

定理 5 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是 $R(A) = R(A, b)$.

为了下一章论述的需要，下面把定理 5 推广到矩阵方程.

定理 6 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件是 $R(A) = R(A, B)$.

六、内容小结

齐次线性方程组 $Ax=0$

$R(A)=n \Leftrightarrow Ax=0$只有零解；

$R(A)<n \Leftrightarrow Ax=0$有非零解．

非齐次线性方程组 $Ax=b$

$R(A)=R(B)=n \Leftrightarrow Ax=b$有唯一解；

$R(A)=R(B)<n \Leftrightarrow Ax=b$有无穷多解．

作业：见雨课堂作业链接