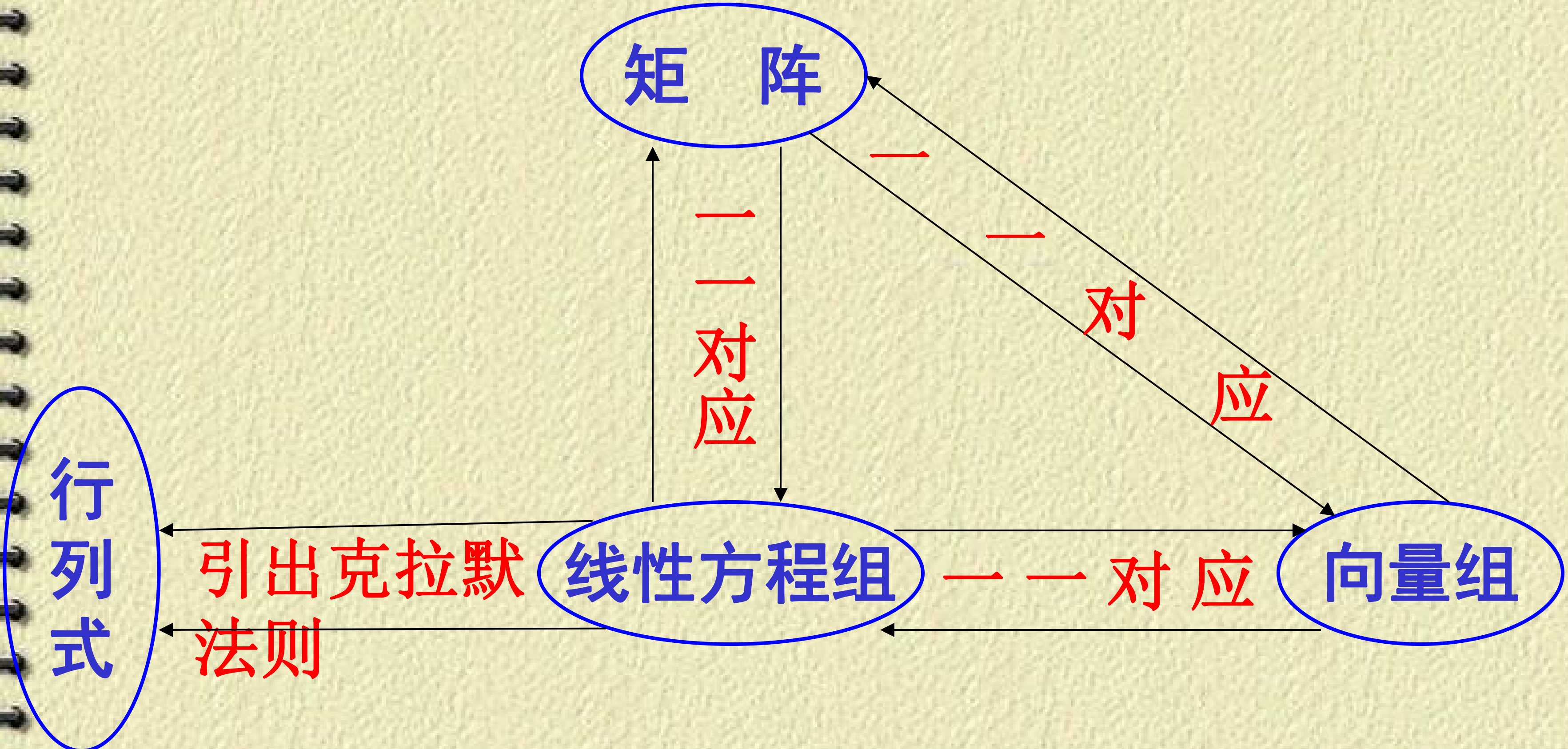
线性代数

北京工业大学耿丹学院数学教研室编

《线性代数》课程是研究线性空间(主要是有限维)和线性变换理论的一门数学基础课,它在数学和现代科学技术以及众多领域有着广泛的应用. 因此,工科学生必须具备有关线性代数的基础理论知识以及使用其解决实际问题的能力，从而为学习后续课程和进一步扩大实践能力打下必要的数学基础.

《线性代数》知识篇四个知识点内在联系图：



上页 下页 返回

第一章

行列式

上页 下页 返回

在初等数学中，我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组，可以看出，线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项所确定．为了更清楚地表达线性方程组的解与未知量的系数和常数项的关系，我们在本章先引入二阶和三阶行列式的概念，并在二阶和三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质，进而把 n 阶行列式应用于解 n 元线性方程组．

行列式是一种常用的数学工具，在数学及其他学科中都有着广泛的应用.

主要内容

1．　n 阶行列式的定义、性质及其计算.

2．　克拉默法则.

重点内容　行列式的计算

上页　下页　返回

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式的引入

二、三阶行列式

三、内容小结

重点：三阶行列式展开

上页　下页　返回

一、二阶行列式的引入

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

定义 由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (4)$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（4）所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意　分母都为原方程组的系数行列式.

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

二、三阶行列式

定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (5)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \qquad (6)$$

（6）式称为数表（5）所确定的**三阶行列式**.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$ 列标

行标

三阶行列式的计算

(1) 沙路法 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(2) 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注意 红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号.

说明1 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

2. 三阶行列式包括3!项, 每一项都是位于不同行, 不同列的三个元素的乘积, 其中三项为正, 三项为负.

利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

的系数行列式 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 + \boxed{a_{13}}x_3 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 + \boxed{a_{23}}x_3 = \boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1 + \boxed{a_{32}}x_2 + \boxed{a_{33}}x_3 = \boxed{b_3}; \end{cases}$$

记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

上页 下页 返回

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3;
\end{cases}
$$

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

得 $$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \boxed{b_3}; \end{cases}$$

得 $$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \boxed{b_3}; \end{cases} \Rightarrow D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4$$

$$-1\times 1\times 4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times 2\times(-3)$$

$$= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24$$

$$= -14.$$

单选题 1分

设置

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

A 72

B -72

C 24

D -24

提交

返回

$$D=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

解：$\boldsymbol{D}=1\times 0\times 5+2\times 3\times 4+(-4)\times(-3)\times(-2)$

$-2\times 0\times(-2)-(-4)\times 3\times 5-1\times(-3)\times 4$

$=0+24-24-0+60+12$

$=72$

上页 下页 返回

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + = 0$ 解得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

例4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1) + (-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1 - 1\times1\times(-1) - (-2)\times2\times(-1) - 1\times(-3)\times1$$

$$= -5 \neq 0,$$

上页 下页 返回

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

三、小结

二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入的.

二阶与三阶行列式的计算 ——对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

思考题

求一个二次多项式$f(x)$,使

$$f(1)=0,\quad f(2)=3,\quad f(-3)=28.$$

上页 下页 返回

思考题解答

解 设所求的二次多项式为

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

由题意得 $f(1)=a+b+c=0,$

$f(2)=4a+2b+c=3,\quad f(-3)=9a-3b+c=28,$

得一个关于未知数 a,b,c 的线性方程组,

又 $D=-20\neq 0,\quad D_1=-40, D_2=60, D_3=-20.$

得 $a=D_1/D=2, b=D_2/D=-3,\quad c=D_3/D=1$

上页 下页 返回

故所求多项式为

$$f(x) = 2x^2 + -3x + 1.$$

上页 下页 返回

作业：
习题一：1

第二节：全排列与逆序数

一、概念的引入

二、全排列及其逆序数

三、小结

重点：逆序数的计算

一、概念的引入

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 1 2 3

百位	1			2			3			3种放法
十位	1	2		1	3					2种放法
个位	1	2	3							1种放法

共有 $3\times 2\times 1=6$ 种放法.

二、全排列及其逆序数

问题　把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（或排列）．

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

由引例　$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

同理　$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序，n 个不同的自然数，规定由小到大为标准次序.

定义 在一个排列 $\left(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n\right)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中，

逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序

定义　一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

例如　排列32514 中,

0　　0　　1

3　2　5　1　4

1　　逆序数为3

故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在$1,2,\cdots,n-1,n$前面比它大的数码之和即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n个元素的逆序数，这个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

例1　求排列32514的逆序数.

解　在排列32514中,

3排在首位,逆序数为0;

2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

于是排列32514的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

$$t = 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0$$

$$= 18$$

此排列为偶排列.

上页 下页 返回

(2) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$

解

$$\overbrace{n\underbrace{(n-1)(n-2)\cdots 3}_{(n-2)}21}^{n-1}$$

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列;

当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

上页 下页 返回

$$(3)\quad (2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$$

解 $(2k)\,1\,(2k-1)\,2\,(2k-2)\,3\,(2k-3)\cdots(k+1)\,k$

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & & \cdots & k \end{array}$$

$$t=0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k$$

$$=\frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2}+k=k^2,$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列，

当 k 为奇数时，排列为奇排列.

三、小结

1　n 个不同的元素的所有排列种数为 $n!$.

2　排列具有奇偶性.

3　计算排列逆序数常用的方法有2 种.

上页 下页 返回

思考题

分别用两种方法求排列16352487的逆序数.

上页 下页 返回

思考题解答

解 用方法1

$$1 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 7$$

$$t = 0+3+1+2+1+0+1+0=8$$

用方法2　由前向后求每个数的逆序数.

$$t = 0+0+1+1+3+2+0+1=8.$$

上页 下页 返回

作业

- 习题一：2

第三节　n阶行列式的定义

- 一、概念的引入
- 二、n阶行列式的定义
- 三、小结　思考题

重点：1、n阶行列式展开特征

2、三角形行列式和对角行列式的计算

帮助　返回

一、概念的引入

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明

（1）三阶行列式共有6 项，即$3!$项.

（2）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$t(312)=1+1=2,$$ 偶排列 $+$正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$t(132)=1+0=1,$$ 奇排列 $-$负号,

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

二、n阶行列式的定义

定义 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

上页 下页 返回

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,$ n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

上页 下页 返回

说明

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的;

2、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

3、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

4、 一阶行列式 $|a| = a$ 不要与绝对值记号相混淆;

5、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^t$.

例1　计算对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　分析

展开式中项的一般形式是　$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

若 $p_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1p_1} = 0$，所以 p_1只能等于 4，

从而这个项为零，同理可得 $p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$

上页 下页 返回

即行列式中不为零的项为$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

例2 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

上页 下页 返回

解　分析

展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

$p_n = n,\ p_{n-1} = n-1,\ p_{n-3} = n-3, \cdots p_2 = 2, p_1 = 1,$

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上页　下页　返回

例3 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = ?$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160.$$

同理可得**下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例4　证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 第一式是显然的,下面证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$, 则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

证毕

上页 下页 返回

例5 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $D_1 = D_2$.

证 由行列式定义有

上页 下页 返回

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

由于 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1+2+\cdots+n,$

所以

$$D_2=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

故 $$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=D_2.$$

三、小结

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的.

2、n 阶行列式共有 $n!$ 项，每项都是位于不同行、不同列 的 n 个元素的乘积,正负号由下标排列的逆序数决定.

思考题

已知 $$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

思考题解答

解 含 x^3 的项有两项,即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^t a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1234)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

上页 下页 返回

$$(-1)^{t} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^{3},$$

$$(-1)^{t(1234)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^{3}$$

故 x^3 的系数为 -1.

上页 下页 返回

第 四节　　行列式的计算

----行列式的性质

一、行列式的性质

二、 应用举例

三、内容小结

重点：1、行列式的性质

　　　2、行列式展开

一、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 按定义

$$D^T=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

又因为行列式D可表示为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

故 $D = D^T$. 证毕

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 互换行列式的两行（列）, 行列式变号.

证明 设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

是由行列式 $D = \det(a_{ij})$ 变换 i, j 两行得到的,

即当 $k \neq i, j$ 时, $b_{kp} = a_{kp}$; 当 $k = i, j$ 时,

$$b_{ip} = a_{jp},\ b_{jp} = a_{ip},$$

于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列,

t为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数.

设排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1, 则有

上页 下页 返回

$$(-1)^t = -(-1)^{t_1},$$

故 $D_1 = -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D.$证毕

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明　互换相同的两行，有 $D = -D$,

$$\therefore \quad D = 0.$$

上页　下页　返回

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

例如
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

投票 最多可选1项

设置

$$\begin{vmatrix} a+1 & b+2 \\ c+3 & d+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$ 是否正确?

A 正确

B 错误

提交

返回

$$\begin{vmatrix} a+1 & b+2 \\ c+3 & d+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+3 & d+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \xleftarrow{k\times} & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_i + kr_j}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

单选题 1分

设置

下列哪种利用上述性质6的运算是正确的?

A

$$5\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3+1\times5 & 4+2\times5\end{vmatrix}$$

D

$$5\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\times5 & 2\times5\\ 3+1\times5 & 4+2\times5\end{vmatrix}$$

提交

返回

二、应用举例

计算行列式常用方法：利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+3r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=} \begin{array}{r} (-4)\times \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

上页 下页 返回

$$\overset{r_3 + r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\overset{r_4 + r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2) \oplus$$

上页 下页 返回

$$\xlongequal{r_5 - 2r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \oplus$$

$$\xlongequal{r_5 + 4r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

上页 下页 返回

投票 最多可选1项

设置

例2. $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$

A -1

B 1

提交

返回

例2. $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}{\underset{r_2-r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix}$

$\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}\overset{r_4-r_3}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$

例3 计算$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解 $D \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_4 + 5r_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$\underset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_4 - 8r_2}}{\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \overset{r_4 + \frac{5}{4}r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40$$

上页 下页 返回

例4 计算$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解 $D\overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\r_4-r_1}}{=}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$

上页 下页 返回

例5：计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$

- 解：将第2、3、4列元素乘1加到第1列上。

$$D=\begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

- 第一行元素乘（-1）加到第2、3、4行上。

$$=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3$$

上页 下页 返回

例6：计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

- 解：第一行乘（-1）加到第二、三、四行

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-8$$

上页 下页 返回

例7 计算$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 4a+3b+c & 5a+4b+3c+d \end{vmatrix}$

解 $D \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}}{\underset{r_2-r_1}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix} = 0$

三、小结

行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

思考题

计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 $abcd=1$)

上页 下页 返回

思考题解答

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}
$$

$$
= 0.
$$

作业

- 习题一
- 4:1、2、5、6
- 5
- 8：2

上页 下页 返回

第六节　行列式按行（列）展开

- 一、余子式与代数余子式
- 二、行列式按行（列）展开法则
- 三、小结　思考题

第 五节　　行列式的计算

------行列式按行(列)展开

一、余子式与代数余子式

二、 行列式按行(列)展开法则

三、内容小结

重点：行列式降阶

一、余子式与代数余子式

例如

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素a_{ij}的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

上页 下页 返回

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别 对应着一个余子式和一个代数余子式.

单选题 1分

设置

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

此行列式中元素4的余子式和代数余子式分别是（　　）

A 9; -9

B -9; 9

C -36; 36

D 36; -36

提交

返回

二、行列式按行（列）展开法则

定理３　行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

例1. 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

解:

$$D=1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=12+36+24=72.$$

上页 下页 返回

还可看出

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

$$=-3\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=84+0-12=72=D,$$

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$$

$$=-2\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-24+36+60=72=D,$$

以及

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\4 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-4 & 2\\4 & 5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-4 & 2\\0 & -3\end{vmatrix}$$

$$=12\ +84\ -24=72=D\,.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- 是按（ ）展开的。

A 第二行

B 第二列

C 第一行

D 第三行

提交 返回

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解 按第一行展开，得

$$D=-3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+(-5)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}=6+0+21=27.$$

注意到第二行零元素较多，按第二行展开，得

$$D=0A_{21}+(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+0A_{23}$$

$$=0+27+0=27.$$

注意，当行列式某一行有多个0元素时，展开结果简单.

上页 下页 返回

例3：
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解 $$D=(-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-6)\cdot(-7)=42$$

上页 下页 返回

说明：

计算行列式时，直接利用拉普拉斯定理展开行列式，通常并不能减少计算量，除非某一行（列）含有较多的零元，因此计算行列式时，应先运用行列式性质，将某一行（列）尽可能多得化为零，然后使用行列式的展开。

例4

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

上页 下页 返回

例5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{2+5}\,2\begin{vmatrix}5&3&-1&2\\0&-2&3&1\\0&-4&-1&4\\0&2&3&5\end{vmatrix}=\quad -2\cdot 5\begin{vmatrix}-2&3&1\\-4&-1&4\\2&3&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}-10\begin{vmatrix}-2&3&1\\0&-7&2\\0&6&6\end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix}-7&2\\6&6\end{vmatrix}$$

$$=20(-42-12)=-1080.$$

上页 下页 返回

例6 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

证 用数学归纳法

$$\because \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j),$$

$\therefore$ 当 $n = 2$ 时（1）式成立.

上页 下页 返回

假设（1）对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公 因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$\therefore \quad D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geq i>j\geq 2}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).$$

上页 下页 返回

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

单选题 1分

设置

• 例：设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则下式中（ ）是正确的。

A $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=0$

B $a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=0$

C $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D$

D $a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D$

提交

返回

行列式的计算方法

到现在为止，我们已能计算任意阶的行列式.

行列式的计算是我们这一章的重点，也是同学们必须掌握的基本技能.

行列式有以下三种计算方法：

1. 直接用定义计算;
2. 利用性质化为三角形行列式;
3. 利用展开式定理降阶.

在这三种方法中, **方法1** 主要用于理论分析, 很少用来计算具体的行列式, 但对于低阶行列式(如二阶、三阶)或有很多零元素的高阶行列式, 有时也可用此方法来计算; **方法2** 适用于行列式的阶不确定的高阶行列式的计算; **方法3** 主要用于阶为已知的高阶行列式的计算. 当然在计算一个行列式时, 应根据实际情况灵活选择计算方法.

一般计算　利用行列式的性质，采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式．化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）；若没有 1 ，则可适当选取便于化零的数，或利用行列式性质将某行（列）中的某数化为1；若所给行列式中元素间具有某些特点，则应充分利用这些特点，应用行列式性质，以达到化为三角形行列式之目的．

利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式，应根据范德蒙行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例4　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

上页　下页　返回

解 D_n中各行元素分别是一个 数的不同方幂，方幂次数自左至右按递升次 序排列，但不是从 0变到$n-1$，而是由1递升至n.若提取各行的公因子， 则方幂次数便从0增至$n-1$，于是得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式，由范德蒙行列式知

$$D_n = n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\bullet (3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

评注 本题所给行列式各行（列）都是某元素的不同方幂，而其方幂次数或其排列与范德蒙行列式不完全相同，需要利用行列式的性质（如提取公因子、调换各行（列）的次序等）将此行列式化成范德蒙行列式.

用降阶法计算

例6 计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

解 将 D_4的第2、3、4行都加到第1行，并从第1行中提取公因子$a+b+c+d$，得

上页 下页 返回

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix},$$

再将第2、3、4列都减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b&a-b&d-b&c-b\\c&d-c&a-c&b-c\\d&c-d&b-d&a-d\end{vmatrix},$$

上页 下页 返回

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第 2行加到第 1行，再从第 1行中提取公因子 $a-b-c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

再将第2列减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-c & a-d & b-c \\ c-d & b-c & a-d \end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

上页 下页 返回

评注　本题是利用行列式的性质将所给行列式的某行（列）化成只含有一个非零元素，然后按此行（列）展开，每展开一次，行列式的阶数可降低 1阶，如此继续进行，直到行列式能直接计算出来为止（一般展开成二阶行列式）．这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用．

小结

计算行列式的方法比较灵活，同一行列式可以有多种计算方法；有的行列式计算需要几种方法综合应用．在计算时，首先要仔细考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对它进行变换后，再考察它是否能用常用的几种方法．

三、内容小结

1. 行列式按行（列）展开法则是把高阶行列式的计算化为低阶行列式计算的重要工具.

$$2.\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$

三、小结

1. 行列式按行（列）展开法则是把高阶行列式的计算化为低阶行列式计算的重要工具.

$$2.\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$

思考题

设n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

思考题解答

解　第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

作业

- 习题一
- 6:3、5
- 8:4

上页 下页 返回

第七节　克拉默法则

非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，此时称方程组为**齐次线性方程组**.

上页 下页 返回

一、克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

用D中第j列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 依次乘方程组(1)的n个方程,得

$$\begin{cases}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)A_{1j}=b_1A_{1j}\\(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)A_{2j}=b_2A_{2j}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)A_{nj}=b_nA_{nj}\end{cases}$$

在把 n 个方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$$

由代数余子式的性质可知, 上式中x_j的系数等于D, 而其余$x_i(i\neq j)$的系数均为0; 又等式右端为D_j.

于是 $$Dx_j=D_j(j=1,2,\cdots,n). \qquad (2)$$

当$D\neq 0$时,方程组(2)有唯一的一个解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

由于方程组(2)与方程组 (1) 等价，故

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

也是方程组的(1)解.

二、重要定理

定理1　如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$，则(1)一定有解，且解是唯一的．

定理2　如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

定理　如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 没有非零解.

上页　下页　返回

定理　如果齐次线性方程组 (2) 有非零解, 则它的系数行列式必为零.

系数行列式 $D=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解.

例1 用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -27, \qquad = 27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例2 用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 67 \neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 5 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 0 & 4\\ 11/6 & 1 & 1 & 1\\ 5/6 & -1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\frac{67}{3},\quad D_2=\begin{vmatrix}3 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 1 & 11/6 & 1 & 1\\ 1 & 5/6 & -3 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & 5 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 1 & 11/6 & 1\\ 1 & -1 & 5/6 & 2\end{vmatrix}=\frac{67}{2},\quad D_4=\begin{vmatrix}3 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 11/6\\ 1 & -1 & -3 & 5/6\end{vmatrix}=67,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{67/3}{67} = \frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{67} = 0,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{67/2}{67} = \frac{1}{2}, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{67}{67} = 1.$$

例3 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3+\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

齐次方程组有非零解，则 $D=0$

所以 $\lambda=0,\lambda=2$ 或 $\lambda=3$时齐次方程组有非零解.

三、小结

1. 用克拉默法则解方程组的两个条件

(1) 方程个数等于未知量个数;

(2) 系数行列式不等于零.

2. 克拉默法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系. 它主要适用于理论推导.

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时,能否用克拉默法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何?

思考题解答

不能,此时方程组的解为无解或有无穷多解.

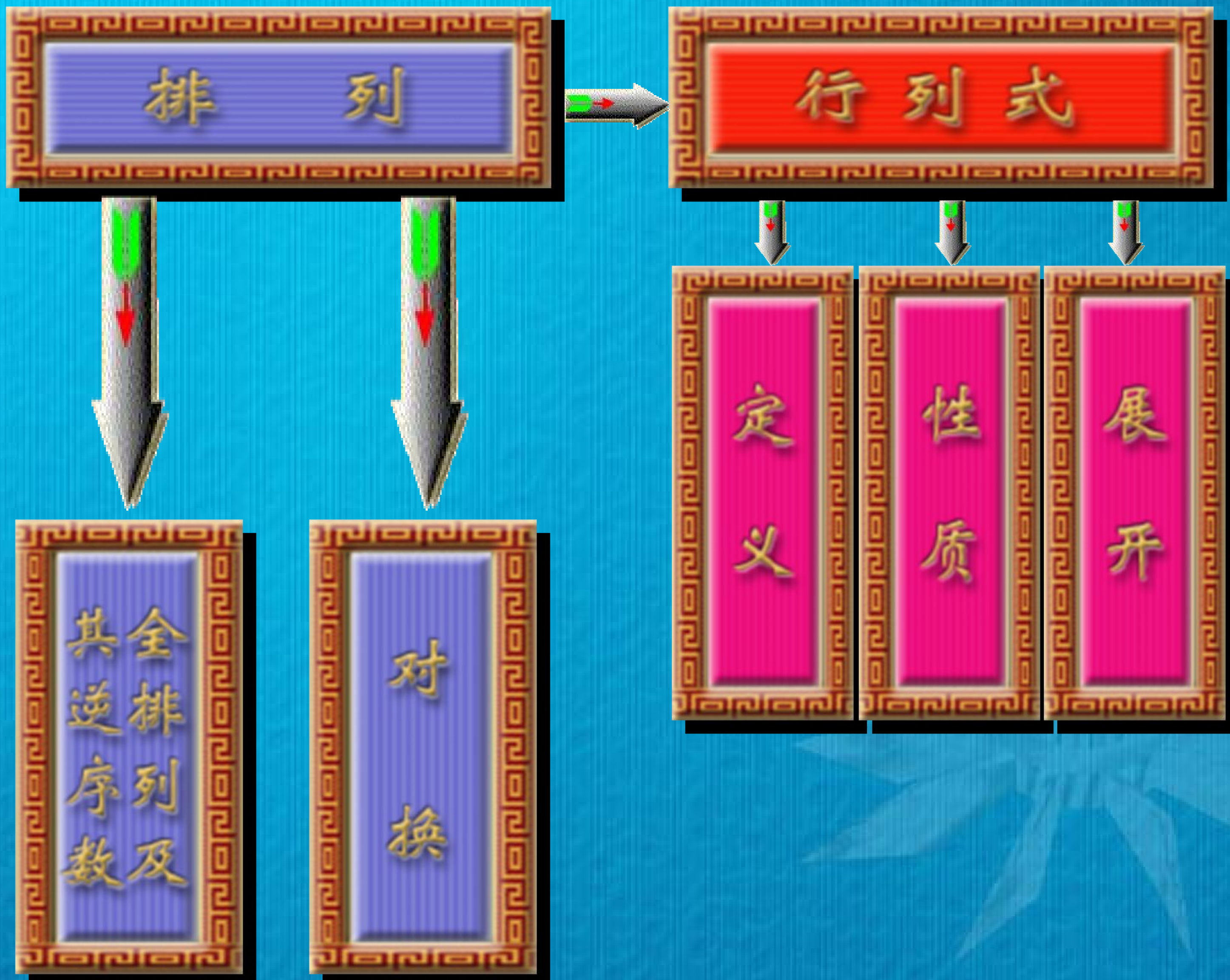
第一章　行列式

习 题 课

一、主要内容

二、典型例题

三、测试题


排列
行列式
全排列及其逆序数
对换
定义
性质
展开

1 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**（或**排列**）.

n 个不同的元素的所有排列的种数用 P_n 表示，且 $P_n = n!$.

2　逆序数

在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$中，若数 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

3　计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码之和，即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个元素的逆序数，这 n 个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

上页　下页　返回

4　对　换

定义　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，称为一次对换．将相邻两个元素对调，叫做相邻对换．

定理　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性．

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数．

5 n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 $p_1 p_2 \dots p_n$ 为自然数$1,2,\dots,n$的一个排列;t为这个排列的逆序数; $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对$1,2,\dots,n$的所有排列取和.

上页 下页 返回

n阶行列式D亦可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中t为行标排列$p_1p_2\dots p_n$的逆序数.

6　n阶行列式的性质

1)行列式与它的转置行列式相等,即$D = D^T$.

2)互换行列式的两行(列),行列式变号.

3)如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

4)行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k,等于用数k乘此行列式.

5)行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可 以提到行列式符号的外面 .

6)行列式中如果有两行 (列) 元素成比例,则此行列式为零.

7)若行列式的某一列 (行) 的元素都是两数之和 ,则此行列式等于两个行列 式之和.

8)把行列式的某一列 (行) 的各元素乘以同一数 ,然后加到另一列 (行) 对应的元素上去 ,行列式的值不变 .

7　行列式按行（列）展开

1）余子式与代数余子式

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式.

2）关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j; \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j; \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当 i = j; \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$

8 克拉默法则

如果线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,那么它有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}, j=1,2,\cdots,n.$$

其中 $D_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 所得到的行列式.

克拉默法则的理论价值

定理 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

的系数行列式$D\neq 0$,那么它一定有解，且解唯一.

定理 如果上述线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

上页 下页 返回

定理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,那么它没有非零解.

定理 如果上述齐次线性方程 组有非零解，则它的系数行列式必为零.

上页 下页 返回

典　型　例　题

- 一、计算排列的逆序数
- 二、计算（证明）行列式
- 三、克拉默法则

上页　下页　返回

一、计算排列的逆序数

例 1 求排列 $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$ 的逆序数,并讨论奇偶性.

解 分别算出排列中每个元素前面比它大的数码之和, 即算出排列中每个元素的逆序数.

$2k$排在首位,故逆序数为0;

1的前面比1大的数有一个$(2k)$,故逆序数为1;

$(2k-1)$的前面比$(2k-1)$大的数有一个$(2k)$,故逆序数为1;

上页 下页 返回

2的前面比2大的数有两个$(2k,2k-1)$,故逆序数为2;

$2k-2$的前面比$2k-2$大的数有两个$(2k,2k-1)$,故逆序数为2;

…………………

$k-1$的前面比$k-1$大的数有$k-1$个$(2k,2k-1,\cdots,k+2)$,故逆序数为$k-1$;

$k+1$的前面比$k+1$大的数有$k-1$个$(2k,2k-1,\cdots,k+2)$,故逆序数为$k-1$;

k的前面比k大的数有k个$(2k,2k-1,\cdots,k+1)$,故逆序数为k;

于是排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k$$

$$= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2} + k$$

$$= k^2$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列，

当 k 为奇数时，排列为奇排列.

上页 下页 返回

二、计算（证明）行列式

1　用定义计算（证明）

例２　用行列式定义计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 设 D_5 中第1,2,3,4,5行的元素分别为 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}, a_{5p_5}$,那么，由 D_5 中第1,2,3,4,5行可能的非零元素分别得到

$$p_1 = 2,3; \qquad p_2 = 1,2,3,4,5;$$

$$p_3 = 1,2,3,4,5; \quad p_4 = 2,3; \quad p_5 = 2,3.$$

因为 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 在上述可能取的代码中，一个5元排列也不能组成，

故 $D_5 = 0$.

评注 本例是从一般项入手，将行标按标准顺序排列，讨论列标的所有可能取到的值，并注意每一项的符号，这是用定义计算行列式的一般方法.

注意 如果一个n阶行列式中等于零的元素比n^2-n还多，则此行列式必等于零.

例3 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明: $D_1 = D_2$.

上页 下页 返回

证明 由行列式的定义有

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

$$D_2=\sum(-1)^t(a_{1p_1}b^{1-p_1})(a_{2p_2}b^{2-p_2})\cdots(a_{np_n}b^{n-p_n})$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)},$$

其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

上页 下页 返回

而 $$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + n,$$

所以 $$D_2 = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = D_1.$$

评注 本题证明两个行列式相等，即证明两点，一是两个行列式有完全相同的项，二是每一项所带的符号相同．这也是用定义证明两个行列式相等的常用方法.

2　利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式，应根据范德蒙行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例4　计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

上页　下页　返回

解 D_n中各行元素分别是一个 数的不同方幂,方幂次数自左至右按递升次 序排列，但不是从0变到$n-1$,而是由1递升至n.若提取各行的公因子，则方幂次数便从0增至$n-1$，于是得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式，由范德蒙行列式知

$$D_n = n!\prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\bullet(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

评注 本题所给行列式各行（列）都是某元素的不同方幂，而其方幂次数或其排列与范德蒙行列式不完全相同，需要利用行列式的性质（如提取公因子、调换各行（列）的次序等）将此行列式化成范德蒙行列式.

3　用化三角形行列式计算

例５　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将第$2,3,\cdots,n+1$列都加到第一列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

将第1列的$(-a_1)$倍加到第 2列，将第 1列的$(-a_2)$倍加到第 3列，$\cdots$,将第1列的$(-a_n)$倍加到最后一列，得

上页 下页 返回

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

评注　本题利用行列式的性质，采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式．化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）；若没有 1 ，则可适当选取便于化零的数，或利用行列式性质将某行（列）中的某数化为1；若所给行列式中元素间具有某些特点，则应充分利用这些特点，应用行列式性质，以达到化为三角形行列式之目的．

4　用降阶法计算

例６　计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

解　将 D_4 的第2、3、4行都加到第1行，并从第1行中提取公因子 $a+b+c+d$，得

上页　下页　返回

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix},$$

再将第2、3、4列都减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b&a-b&d-b&c-b\\c&d-c&a-c&b-c\\d&c-d&b-d&a-d\end{vmatrix},$$

上页 下页 返回

按第1行展开，得

$$D_4 = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第 2行加到第 1行，再从第 1行中提取公因子 $a-b-c+d$，得

$$D_4 = (a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

再将第2列减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ d-c & a-d & b-c\\ c-d & b-c & a-d\end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix}a-d & b-c\\ b-c & a-d\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

评注　本题是利用行列式的性质将所给行列式的某行（列）化成只含有一个非零元素，然后按此行（列）展开，每展开一次，行列式的阶数可降低 1阶，如此继续进行，直到行列式能直接计算出来为止（一般展开成二阶行列式）．这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用.

上页　下页　返回

5　用拆成行列式之和（积）计算

例7　证明

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

证

$$左边 = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

６　用递推法计算

例８　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

解　依第n列把D_n拆成两个行列式之和

上页　下页　返回

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

右端的第一个行列式,将第n列的(-1)倍分别加到第$1,2,\cdots,n-1$列,右端的第二个行列式按第n列展开,得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + x_n D_{n-1},$$

从而 $D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_n D_{n-1}.$

由此递推，得

$$D_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-2}a+x_{n-1}D_{n-2},\text{于是}$$

$$D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n$$
$$+x_nx_{n-1}D_{n-2}.$$

如此继续下去，可得

$$D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n+\cdots$$
$$+x_1x_2ax_4\cdots x_n+x_nx_{n-1}\cdots x_3D_2$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a\, x_n$$

$$+ \cdots + x_1 x_2 a\, x_4 \cdots x_n$$

$$+ x_n x_{n-1} \cdots x_3 (a\, x_1 + a\, x_2 + x_1 x_2)$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_n + a(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \cdots$$

$$+ x_1 x_3 \cdots x_n + x_2 x_3 \cdots x_n).$$

当$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$时，还可改写成

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_n \left[1 + a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right].$$

评注 本题是利用行列式的性质把所给的n阶行列式D_n用同样形式的$n-1$阶行列式表示出来，建立了D_n与$n-1$阶行列式D_{n-1}之间的递推关系.有时，还可以把给定的n阶行列式D_n用同样形式的比$n-1$阶更低阶的行列式表示，建立比$n-1$阶行列式更低阶行列式之间的递推关系.

7　用数学归纳法

例9　证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \cos n\alpha.$$

证 对阶数n用数学归纳法

因为 $D_1 = \cos\alpha$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha,$$

所以,当 $n=1, n=2$ 时,结论成立.

假设对阶数小于 n 的行列式结论成立,下证对于阶数等于 n 的行列式也成立.现将 D_n 按最后一行展开,得

$$D_n = 2\cos\alpha\, D_{n-1} - D_{n-2}.$$

由归纳假设，$D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha,$

$D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha,$

$$
\begin{aligned}
D_n &= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha \\
&= [\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha]-\cos(n-2)\alpha \\
&= \cos n\alpha;
\end{aligned}
$$

所以对一切自然数n结论成立.

评注 为了将 D_n 展开成能用其同型的 D_{n-1}，D_{n-2} 表示,本例必须按第 n 行(或第 n 列)展开,不能按第1行(或第1列)展开,否则所得的低阶行列式不是与 D_n 同型的行列式.

一般来讲,当行列式已告诉其结果,而要我们证明是与自然数有关的结论时,可考虑用数学归纳法来证明.如果未告诉结果,也可先猜想其结果,然后用数学归纳法证明其猜想结果成立.

小结

计算行列式的方法比较灵活，同一行列式可以有多种计算方法；有的行列式计算需要几种方法综合应用．在计算时，首先要仔细考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对它进行变换后，再考察它是否能用常用的几种方法．

三、克拉默法则

当线性方程组方程个数与未知数个数相等、且系数行列式不等于零时，可用克莱姆法则．为了避免在计算中出现分数，可对有的方程乘以适当整数，把原方程组变成系数及常数项都是整数的线性方程组后再求解．

例10　求一个二次多项式 $f(x)$,使

$$f(1)=0, f(2)=3, f(-3)=28.$$

解 设所求的二次多项式为

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

由题意得

$$f(1)=a+b+c=0,$$
$$f(2)=4a+2b+c=3,$$
$$f(-3)=9a-3b+c=28,$$

这是一个关于三个未知 数 a,b,c的线性方程组.

$$D = -20 \neq 0, \quad D_1 = -40,$$

$$D_2 = 60, \quad D_3 = -20.$$

由克莱姆法则，得

$$a = \frac{D_1}{D} = 2, b = \frac{D_2}{D} = -3, c = \frac{D_3}{D} = 1.$$

于是，所求的多项式为

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

例11　证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0$.

证　必要性　设所给三条直线交于一点$M(x_0, y_0)$,

则$x=x_0, y=y_0, z=1$可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$

的非零解.从而有系数行列式.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2})(a+b+c)$$

$$\bullet [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0.$$

因为三条直线互不相同，所以a,b,c也不全相同，故$a+b+c=0$.

充分性　如果$a+b+c=0$，将方程组

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \\ cx + ay = -b \end{cases} \qquad (1)$$

上页 下页 返回

的第一、二两个方程加 到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \\ \quad 0 = 0. \end{cases} \qquad （2）$$

下证此方程组（2）有 唯一解．

如果$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$，则$ac = b^2 \geq 0$。由

$b = -(a+c)$得$ac = [-(a+c)]^2 = a^2 + 2ac + c^2$，于是

$ac = -(a^2 + c^2) \leq 0$，从而有$ac = 0$.

上页 下页 返回

不妨设$a=0$,由$b^2=ac$得$b=0$.再由$a+b+c=0$得$c=0$，与题设矛盾.故

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0.$$

由克莱姆法则知，方程组(2)有唯一解.从而知方程组(1)有唯一解，即三条不同直线交于一点.

上页 下页 返回

例12 有甲、乙、丙三种化肥，甲种化肥每千克含氮70克，磷8克，钾2克；乙种化肥每千克含氮64克，磷10克，钾0.6克；丙种化肥每千克含氮70克，磷5克，钾1.4克．若把此三种化肥混合，要求总重量23千克且含磷149克，钾30克，问三种化肥各需多少千克？

解 设甲、乙、丙三种化肥各需 x_1、x_2、x_3 千克,依题意得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 23, \\ 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 149, \\ 2x_1 + 0.6x_2 + 1.4x_3 = 30. \end{cases}$$

上页 下页 返回

此方程组的系数行列式 $D=-\dfrac{27}{5}$，

又 $D_1=-\dfrac{81}{5}$， $D_2=-27$， $D_3=-81$

由克莱姆法则，此方程 组有唯一解

$$x_1=3,\quad x_2=5,\quad x_3=15.$$

即甲、乙、丙三种化肥 各需3千克,5千克,15千克.

例13　设水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 .$$

由实验测得以下数据：

t	0^0	10^0	20^0	30^0
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t = 15^0, 40^0$ 时水银密度(准确到小数两位).

上页　下页　返回

解 将测得的数据分别代入 $h(t)$,得方程组

$$\begin{cases} a_0 = 13.6, \\ a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 = 13.57, \\ a_0 + 20a_1 + 400a_2 + 8000a_3 = 13.55, \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 + 27000a_3 = 13.52. \end{cases} \quad (1)$$

将 $a_0 = 13.60$ 分别代入其余三个方程,得方程组

$$\begin{cases} a_1 + 10a_2 + 100a_3 = -0.003, \\ 2a_1 + 40a_2 + 800a_3 = -0.005, \\ 3a_1 + 90a_2 + 2700a_3 = -0.008. \end{cases} \quad (2)$$

上页 下页 返回

此方程组的系数行列式 $D = 12000$,

又 $D_1 = -50$, $D_2 = 1.8$, $D_3 = -0.04$,

由克莱姆法则 ,得方程组 (2)的唯一解

$$a_1 = -0.0042,$$

$$a_2 = 0.00015,$$

$$a_3 = -0.0000033.$$

又 $a_0 = 13.60$,将以上四个数代入 $h(t)$,得

上页 下页 返回

$$h(t) = 13.60 - 0.0042\,t + 0.00015\,t^2 - 0.0000033\,t^3.$$

由此得

$$h(15) = 13.56, \quad h(40) = 13.46.$$

所以,当$t = 15^0, 40^0$时,水银密度分别为13.56,13.46.

上页 下页 返回

第一章　　测试题

一、填空题（每小题4分，共40分）

1. 若$D_n = \left|a_{ij}\right| = a$,则$D = \left|-a_{ij}\right| = $______

2. 设x_1, x_2, x_3是方程$x^3 + px + q = 0$的三个根,则行列式$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = $______

3. 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1997 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1998 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_$

上页 下页 返回

5. 设四阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$,

则 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} =$ ________

6. 在五阶行列式中 $a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$ 的符号为 ______

7. 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是______

上页 下页 返回

8. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = $ ________

9. 若 a,b 为实数，则当 $a=$ ____ 且 $b=$ ____ 时，

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

上页 下页 返回

10. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$可经____次对换后变为排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$.

二、计算下列行列式(每小题9分，共18分).

$$1.\ D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2.\ D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

三、解答题(9分). 问λ,μ取何值,齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

上页 下页 返回

四、证明(每小题8分，共24分).

1. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$=0;$$

$$2.\ D_n=\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

上页 下页 返回

3. 用数学归纳法证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j), \ (n \ge 2)$$

上页 下页 返回

五、（9分）设 n 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

上页 下页 返回

测试题答案

一、1. $(-1)^n a$;　　2. 0;　　3. $-1998!$;

4. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$;　5. 0;

6. $-$;　　7. -2;　　8. $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$;

9. 0,0;　　10. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

二、1. -170;　　2. $\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$.

三、$\lambda=0$或$\mu=0$.　　五、$n!\left(1-\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{1}{j}\right)$.

上页　下页　返回

第二章

矩阵及其运算

矩阵是线性代数的一个主要研究对象，也是数学上的一个重要工具。矩阵的应用已经渗透到了包括自然科学、人文科学、社会科学在内的各个领域。

主要内容

1．矩阵的运算及其性质.

2．矩阵的分块.

重点内容 1. 矩阵的乘法.

2. 逆矩阵的计算.

第一节　线性方程组与矩阵

一、矩阵概念的引入

二、矩阵的定义

三、内容小结

上页　下页　返回

一、矩阵概念的引入

1. 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

的解取决于

系数 $a_{ij}(i, j = 1,2,\cdots,n)$,

常数项 $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$

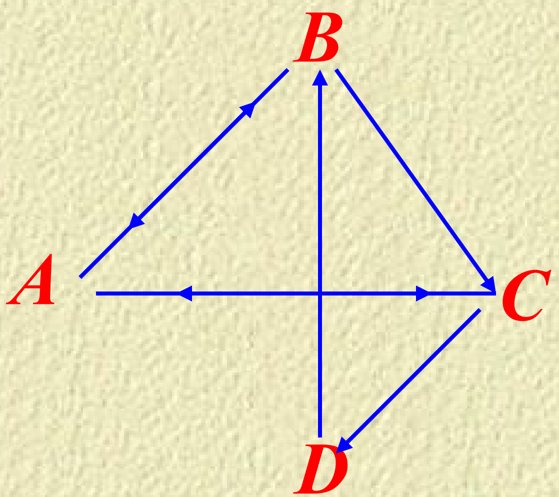
上页 下页 返回

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线，如图所示表示了四城市间的航班图,如果从A到B有航班,则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

发站 \ 到站	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中√表示有航班.

为了便于计算,把表中的√改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

上页 下页 返回

二、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 简称 $m \times n$ 矩阵. 记作

主对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

副对角线

矩阵A的(m,n)元

简记为 $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right).$

这$m\times n$个数称为A的元素,简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵, (4) 是一个 1×1 矩阵.

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于 n 的矩阵 A，称为 n 阶**方阵**. 也可记作 A_n.

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

(2) 只有一行的矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

称为**行矩阵**(或**行向量**).

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$ 称为**列矩阵**（或**列向量**）.

不全为0

（3）形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵，称为**对角矩阵**（或**对角阵**）.

上页 下页 返回

记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$

（4）元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, $m \times n$ 零矩阵记作 $o_{m\times n}$ 或 o .

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如 $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5)方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）.

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称**矩阵 A 与 B 相等**,记作 $A=B$.

例1 n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$与m个变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$的线性变换.

其中 a_{ij}为常数.

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n.
\end{cases}
$$

$$\cdots\cdots$$

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

系数矩阵

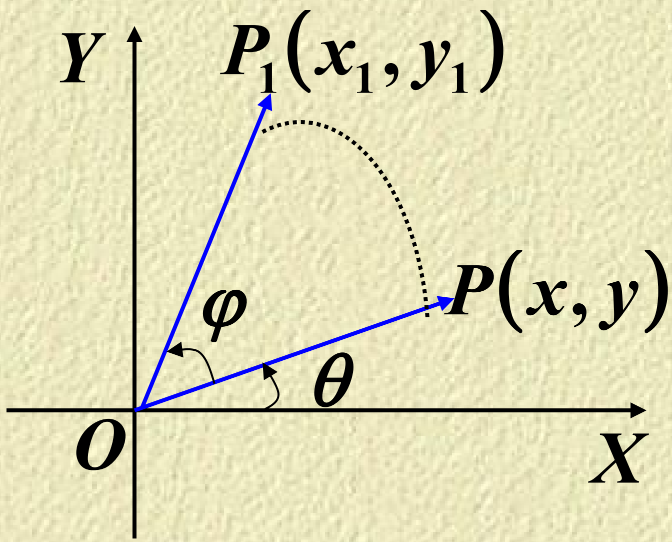
线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

若线性变换为 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称之为恒等变换.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ 单位阵.

线性变换

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



这是一个以原点为中心旋转 φ 角的旋转变换.

例2 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解 $\because\ A=B,$

$\therefore x=2,\ \ y=3,\ \ z=2.$

上页 下页 返回

三、小结

(1)矩阵的概念　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m = n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 零矩阵.

思考题

矩阵与行列式的有何区别?

思考题解答

矩阵与行列式有本质的区别，行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个数表，它的行数和列数可以不同.

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

二、数与矩阵相乘

三、矩阵与矩阵相乘

四、矩阵的其它运算

五、内容小结

重点：矩阵乘法

一、矩阵的加法

1、定义

设有两个$m \times n$矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, 那末矩阵 A 与 B 的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

例如，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$与$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$不能相加.

2、 矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij}),$$

称为矩阵A的**负矩阵**.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

(5) $A+O=O+A=A$, 其中 O 与 A 是同型矩阵.

二、数与矩阵相乘

1、定义

数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

2、数乘矩阵的运算规律

（设 A、B为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ为数）

$$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$$

$$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的**线性运算**.

例1 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

求 $2A, 2A-B$.

解

$$2A=2\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&-4&4\\0&2&0\end{pmatrix}$$

$$2A-B=2A+(-B)=2A+(-1)B$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&-4&4\\0&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\-3&2&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&6\\1&-2&3\\1&2&-1\end{pmatrix}.$$

多选题 1分

设置

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{bmatrix}$$

且 $A+2X=B$ 则X=（ ）

B $X=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1\end{bmatrix}$

C $X=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1\end{bmatrix}$

D $X=\frac{1}{2}(B-A)$

提交

返回

- 例：已知

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{bmatrix}$$

- 且 $A+2X=B$ 求X
- 解：由 $A+2X=B$
- 可得

$$X=\frac{1}{2}(B-A)$$

上页 下页 返回

• 则

$$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1\end{bmatrix}$$

三、矩阵与矩阵相乘

1、定义

设$A=(a_{ij})$是一个$m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$是一个$s\times n$ 矩阵，那末规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

上页 下页 返回

$$(-2)\times 2+4\times(-3)=$$

例2

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times2}$$

?

例3 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

求 AB.

上页 下页 返回

解 $\because A=(a_{ij})_{3\times 4},\quad B=(b_{ij})_{4\times 3},$

$$\therefore C=(c_{ij})_{3\times 3}.$$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

注意　只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
不存在.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 \end{pmatrix} = (10).$$

上页　下页　返回

单选题 1分

设置

设矩阵 $A_{6\times2}$，$B_{2\times3}$，$C_{3\times4}$ 则下列矩阵运算有意义的是 (　　)

A ABC

B ACB

C BAC

D CBA

提交

返回

２、矩阵乘法的运算规律

$$(1)\ (AB)C=A(BC);$$

$$(2)\ A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)A=BA+CA;$$

$(3)\ \lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$$(4)\ AE=EA=A;$$

(5) 若A是 n 阶矩阵，则 A^k 为A的 k 次幂，即

$A^k=\underbrace{A\,A\cdots A}_{k个}$ 并且 $A^mA^k=A^{m+k}, (A^m)^k=A^{mk}$.

另外还规定： $A^0=E.$

$$(AB)^k=\underbrace{(AB)(AB)\cdots\cdots(AB)}_{k个}\neq A^kB^k$$

上页 下页 返回

- 例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},$$

- 则

$$A^2A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=A^3=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^3,$$

$$(A^2)^3=A^6=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^6,$$

上页 下页 返回

注意 矩阵不满足交换律，即：

$$AB \neq BA,\ (AB)^k \neq A^k B^k.$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

故 $AB \neq BA.$

但也有例外，比如设

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA.$$

此时称矩阵A,B可交换

上页 下页 返回

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

试证: (1) $AB=0$; (2) $AC=AD$

证：

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times(-2)+1\times 2 & 1\times 1+1\times(-1)\\ (-1)\times(-2)+(-1)\times 2 & (-1)\times 1+(-1)\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=O$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

故 $AC=AD$

上页 下页 返回

比较：

➢在数的乘法中， 若 $ab=0 \Rightarrow a=0$ 或 $b=0$

在矩阵乘法中,若 $AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

两个非零矩阵乘积可能为O。

➢在数的乘法中， 若 $ac=ad$， 且 $a\neq 0 \Rightarrow c=d$

(消去律成立)

在矩阵乘法中, 若 $AC=AD$, 且 $A\neq O \not\Rightarrow C=D$

(消去律不成立)

上页 下页 返回

注意：矩阵相乘的三大特征

1、无交换律 $AB \overset{?}{=} BA$

2、无消去律 $AM = AN \overset{?}{\Longrightarrow} M = N$

3、若 $AB = O \overset{?}{\Longrightarrow} A = O \ .or.\ B = O$

单选题 1分

设置

设A与 B为n阶方阵，则下列命题中正确的是(　　).

A $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

B $AB = BA$

C $(A+E)(A-E) = (A-E)(A+E)$

D $(AB)^k = A^k B^k$

提交

返回

3. 线性方程组的矩阵表示

设方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

简记为 $AX = B$

上页 下页 返回

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为由线性方程组所确定的**系数矩阵**，

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的**右端向量**。

上页 下页 返回

例5 计算下列乘积：

(1) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解 (1) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times2 \\ 3\times1 & 3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解 $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3 & a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3 & a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}b_1^2+a_{22}b_2^2+a_{33}b_3^2+2a_{12}b_1b_2+2a_{13}b_1b_3+2a_{23}b_2b_3.$$

四、矩阵的其它运算

1、转置矩阵

定义 把矩阵A的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T.

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}$.

转置矩阵的运算性质

$(1)\left(A^T\right)^T = A;$

$(2)(A+B)^T = A^T + B^T;$

$(3)(\lambda A)^T = \lambda A^T;$

$(4)(AB)^T = B^T A^T.$

(5) 若 A 为 n 阶方阵, 则 $(A^m)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^m$.

上页 下页 返回

例7 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{求}\ (AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

上页 下页 返回

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

2、方阵的行列式

定义 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ 则 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-2.$

运算性质 $(1)\ |A^T|=|A|$; $(2)\ |\lambda A|=\lambda^n|A|$;

$(3)\ |AB|=|A||B|$; $\Rightarrow |AB|=|BA|$.

例如：$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{pmatrix}$，有 $|AB|=\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{vmatrix}=30$

而 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10$，$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$

所以 $|AB|=|A||B|$

推广：

$$|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|$$

$$|A^m| = |A|^m$$

单选题 1分

设置

设 A 为 5 阶方阵，且 $\left|A\right| = 2$，则 $\left|-2A\right| = ($　　$)$

A -4

B 4

C -64

D 64

提交

返回

.设A为2阶方阵，且$|A|=2$,则$|-3A^3|=$（ ）

A -24

B 72

C 24

D -72

提交 返回

3、对称阵与伴随矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A=A^T$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

那末 A 称为**对称阵**.

例如 $A=\begin{pmatrix}12 & 6 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 为对称阵.

说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

如果 $A^T=-A$ 则矩阵 A 称为反对称的.

上页 下页 返回

伴随矩阵：

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

上页 下页 返回

4、共轭矩阵

定义

当 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵时，用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$，$\overline{A}$ 称为 A 的共轭矩阵.

运算性质

（设 A, B 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

$(1)\ \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

$(2)\ \overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$;

$(3)\ \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

思考题

设A与B为n阶方阵,问等式

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

成立的充要条件是什么?

思考题解答

答　$\because (A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2,$

故 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 成立的充要条件为

$$AB=BA.$$

上页　下页　返回

五、内容小结

矩阵运算

- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 转置矩阵
- 方阵的行列式
- 对称阵与伴随矩阵
- 共轭矩阵

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘,且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

作业:

习题二:

1：1、4

2

第三节　逆矩阵

一、概念的引入

二、逆矩阵的概念和性质

三、逆矩阵的求法

四、内容小结

重点：逆矩阵计算

一、概念的引入

在数的运算中，当数$a \neq 0$时， 有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为a 的倒数,（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中,单位阵E相当于数的乘法运算中的1， 那么，对于矩阵A ,如果存在一个矩阵A^{-1},

使得 $$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}称为A 的可逆矩阵或逆阵.

二、逆矩阵的概念和性质

定义 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是**可逆**的，并把矩阵B称为A的**逆矩阵**.

A的逆矩阵记作A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E, \quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

上页 下页 返回

例如 设 $a_{11}\quad a_{22}\quad \dots\quad a_{nn} \neq 0$,

由于：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & 0 \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & 0 \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

现在的问题是，矩阵 A 满足什么条件时可逆？

可逆矩阵的逆矩阵是否唯一，如何求逆矩阵？

可逆矩阵有什么性质？这是本节要讨论的问题.

定理1 若A 是可逆矩阵，则A 的逆矩阵是唯一的.

证明 若设 B 和 C 是A 的可逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的,即

$$B = C = A^{-1}.$$

伴随矩阵:

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

上页 下页 返回

定理2　矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵.

奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A|=0$时，A称为奇异矩阵，当$|A|\neq 0$时，A称为非奇异矩阵.

由此可得A是可逆阵的充要条件是A为非奇异矩阵.

推论 若 $AB = E$（或 $BA = E$），则 $B = A^{-1}$.

证明 $|A|\cdot|B| = |E| = 1$, 故 $|A| \neq 0$,

因而 A^{-1} 存在, 于是

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB)$$

$$= A^{-1}E = A^{-1}.$$

证毕

上页 下页 返回

三、逆矩阵的求法

定理2给出了求逆矩阵的方法,即先求 $|A|$, A^*,

再套公式 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

例 2 求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆阵

解　因为$|A|=ad-bc$,

$$A_{11}=d,\ A_{12}=-c,\ A_{21}=-b,\ A_{22}=a.$$

所以 $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,

所以当$|A|\neq 0$时, 有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

上页　下页　返回

例3　求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解　$\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

上页　下页　返回

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得
$$A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

例4 下列矩阵A, B是否可逆？若可逆,求出其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&7\\4&7&7\end{pmatrix}.$$

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=4\neq 0,$$ 所以A可逆.

$$\because \quad A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-3, \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5,$$

同理可求得 $A_{21}=3, A_{22}=0, A_{23}=-1, A_{31}=1,$

$A_{32}=4, A_{33}=-3.$

上页 下页 返回

$$\therefore A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0,$ 故B不可逆.

多选题 2分

设置

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，则下列结果正确的是

A $|A|=2$

B $A^*=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -6\\ -4 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$

C $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

D $A^*=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 3\\ 2 & 2 & -1\\ -6 & -4 & 3\end{pmatrix}$

提交

返回

逆矩阵的应用：

1. 解线性方程组

设方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可表示为
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

简记为 $AX = B$ 若 $|A| \neq 0$，A^{-1}存在，则 $X = A^{-1}B$

上页 下页 返回

例5 解方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

解：方程组简记为 $\boldsymbol{AX = B}$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

由于 $|A| = 2 \neq 0$, A可逆，故

$$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

上页 下页 返回

而 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\ 9\\ -3\end{bmatrix}$$

即 $x_1=-8,\quad x_2=9,\quad x_3=-3.$

上页 下页 返回

2 解矩阵方程

例6 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$

求矩阵X使满足 $AXB=C.$

解 $\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

上页 下页 返回

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow A^{-1}\underbrace{AXB}_{E}B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

$$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}.$$

注意: ①由于矩阵乘法不满足交换律,用矩阵A^{-1}乘方程AXB=C两边时,必须同时在左边乘.

②对于高阶矩阵 A ,用伴随矩阵法求A^{-1}是比较麻烦的.

上页 下页 返回

例11 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$求$A^{-1}$.

解 因$|A|=5!\neq 0$, 故A^{-1}存在.

由伴随矩阵法得 $A^{-1}=A^{*}/|A|$,

上页 下页 返回

$$
=\frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.
$$

例5 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\overbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}}^{E} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，

得

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$，

得 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -54 & 21 \\ 9 & 54 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明 $$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}$$

$$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

上页 下页 返回

(4) 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

另外,当$|A|\neq 0$时,定义

$$A^0=E,\quad A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^k.$$

(k为正整数)

当$|A|\neq 0, \lambda, \mu$为整数时,有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},\qquad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

上页 下页 返回

(5)若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1} = E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1$

因此$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

（6） $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$, m 为正整数.

思考题

若A可逆,那么矩阵方程 $AX = B$是否有唯一解 $X = A^{-1}B$? 矩阵方程 $YA = B$ 是否有唯一解 $Y = BA^{-1}$?

思考题解答

答 是的.这是由于 A^{-1}的唯一性决定的 .

上页 下页 返回

五、内容小结

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

逆矩阵的计算方法

(1)待定系数法; (2)利用公式 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$;

(3)初等变换法(下一章介绍).

作业

- 习题二
- 9：（1、3、4）
- 12、13、16、17、18、19、20、21

第 4节　　克拉默法则

一、克拉默法则
二、重要定理
三、内容小结

上页 下页 返回

在本章的第一节，我们在引进了二阶、三阶行列式以后，得到了二元、三元线性方程组的很好记忆的求解公式. 定义了 n 阶行列式以后，对于含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组，也有类似的求解公式——克拉默法则.

非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，此时称方程组为**齐次线性方程组**.

上页 下页 返回

一、克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中$\boldsymbol{D}_j$是把系数行列式$\boldsymbol{D}$中第$\boldsymbol{j}$列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的$\boldsymbol{n}$阶行列式，即

$$\boldsymbol{D}_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

二、重要定理

定理1 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$，则 (1)一定有解，且解是唯一的 .

定理1′ 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.（逆否命题）

上页 下页 返回

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

定理2 如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 没有非零解.

定理2′ 如果齐次线性方程组(2)有非零解, 则它的系数行列式必为零 $D = 0$.（逆否命题）

反之：以后将证明：若系数行列式 $D=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解.

例1 用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_1 - 2r_2}{\underset{r_4 - r_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \overset{c_1+2c_2}{\underset{c_3+2c_2}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

注意： 通过上述例子，我们看到用克拉默法则求解线性方程组时，要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，这个计算量是相当大的，所以，在具体求解线性方程组时，很少用克拉默法则，不具有实际计算意义.

另外，当方程组中方程的个数与未知量的个数**不等**时，就不能用克拉默法则求解.

但这并不影响克拉默法则在线性方程组理论中的重要地位. 克拉默法则不仅给出了方程组有唯一解的条件，并且给出了方程组的解与方程组的系数和常数项的关系.

例2 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0,\end{cases}$$

有非零解？

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\boxed{= \lambda(\lambda-3)(2-\lambda),}$$

因为D=0时，齐次方程组有非零解

所以 $\lambda = 0, \lambda = 2$ 或 $\lambda = 3$时齐次方程组有非零解.

上页 下页 返回

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1-\lambda & -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1\\ 0 & \lambda-3 & -(\lambda-3)(\lambda+1)\end{vmatrix}=-(\lambda-3)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1\\ 1 & -(\lambda+1)\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-3)\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)$$

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时,能否用克拉默法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何?

上页 下页 返回

思考题解答

不能,此时方程组的解为无解或有无穷多解.

上页 下页 返回

三、内容小结

1. 用克拉默法则解方程组的两个条件

(1) 方程个数等于未知量个数;

(2) 系数行列式不等于零.

2. 克拉默法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系. 它主要适用于理论推导.

作业

- 习题二
- 15

上页 下页 返回

第二章　矩阵及其运算

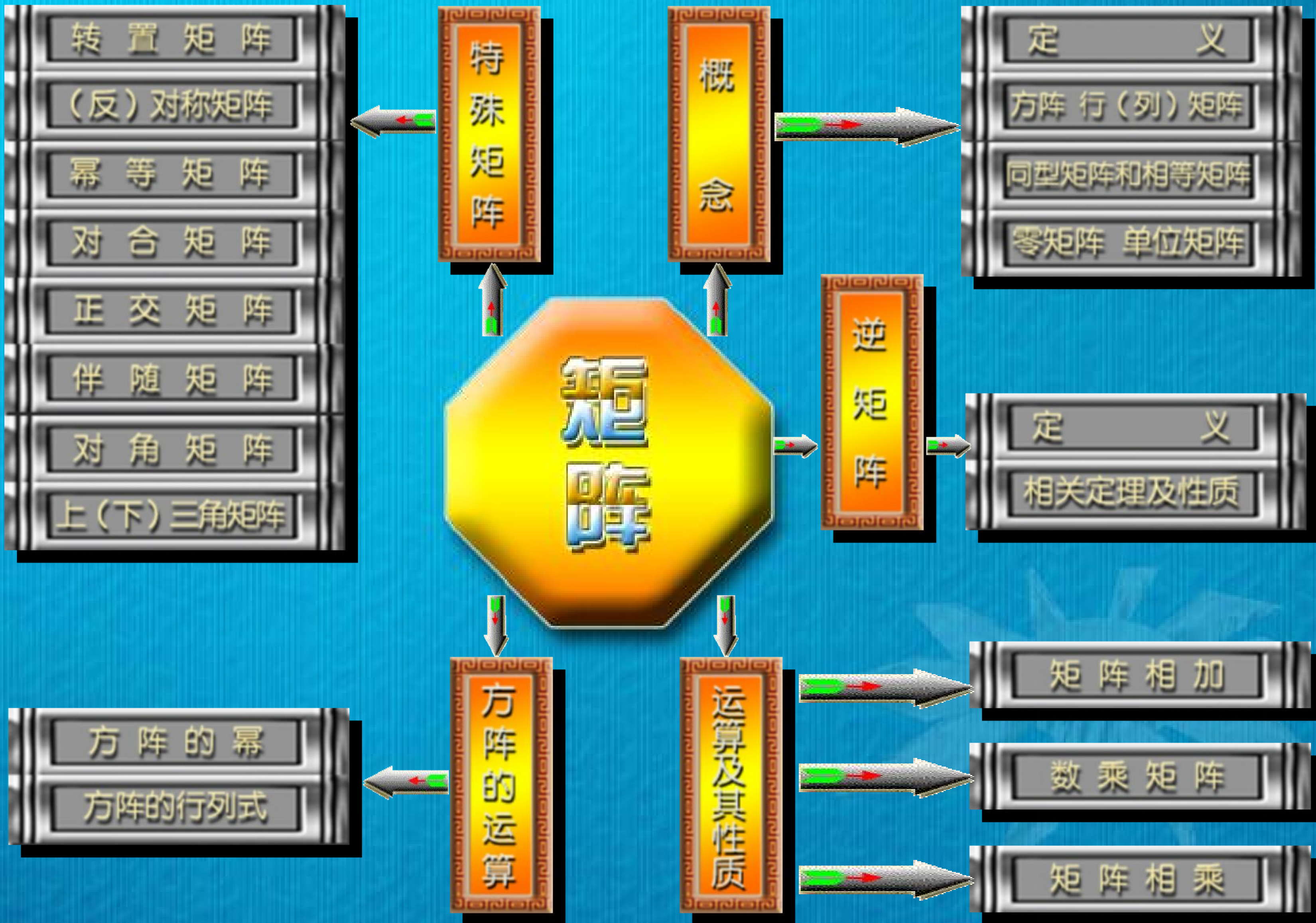
习题课

一、主要内容

二、典型例题

三、测试题

一、主要内容



上页 下页 返回

1 矩阵的定义

由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$排成$m$行$n$列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

叫做m行n列矩阵,简称$m\times n$矩阵.

其中 $m \times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素，a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

元素是实数的矩阵叫做实矩阵.

元素是复数的矩阵叫做复矩阵.

(1)式可简记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \text{或} A=(a_{ij}),$$

$m \times n$ 矩阵 A 也记作 $A_{m\times n}$.

上页 下页 返回

2　方阵　列矩阵　行矩阵

对(1)式,当$m=n$时,A称为n阶方阵.

只有一列的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$叫做列矩阵；

只有一行的矩阵 $A=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$叫做行矩阵.

3 同型矩阵和相等矩阵

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是同型矩阵.

如果$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

那么就称矩阵 A与矩阵 B相等，记作$A=B$.

4　零矩阵　单位矩阵

元素都是零的矩阵称为 零矩阵,记作O.

主对角线上的元素都是1,其余元素都是零的n阶方阵,叫做n阶单位阵,简记作E.

5 矩阵相加

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$为两个同型矩阵，矩阵加法定义为 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, $A+B$称为A与B的和.

交换律 $A+B=B+A$

结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

设$A=(a_{ij})$, 记$-A=(-a_{ij})$, $-A$称为矩阵A的负矩阵，从而有$A+(-A)=O$, 并规定

$$A-B=A+(-B).$$

6　数乘矩阵

数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij}).$$

运算规律

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A;$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$$

7　矩阵相乘

设$A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$,规定A与B的乘积是一个$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots n),$$

记作　　$C=AB$.

上页　下页　返回

运算规律

$$(AB)C = A(BC);$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),\quad (其中\lambda为数);$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(B + C)A = BA + CA;$$

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n.$$

8　方阵的运算

n阶方阵的幂

设A是n阶方阵,定义

$$A^1 = A, A^2 = A^1 A^1, \cdots, A^{k+1} = A^k A^1,$$

其中k是正整数.

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl},$$

其中k, l为正整数.

一般地　$(AB)^k \neq A^k B^k$.

上页 下页 返回

方阵的行列式

由n阶方阵A的元素所构成的行列式，叫做方阵A的行列式，记作$|A|$或$\det A$.

运算规律

设λ为数，A,B为n阶方阵，则

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|;$$

$$|AB| = |A||B|.$$

上页 下页 返回

9　一些特殊的矩阵

转置矩阵

把矩阵 A 的行换成同序数的列得　到一个新矩阵,叫做 A 的转置矩阵 ,记作 A^T.

$$(A^T)^T = A;$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

对称矩阵

设A为n阶方阵,如果 $A^T = A$,则称A为对称矩阵.

反对称矩阵

设A为n阶方阵,如果 $A^T = -A$,则称A为反对称矩阵.

幂等矩阵

设A为n阶方阵,如果 $A^2 = A$,则称A为幂等矩阵.

对合矩阵

设A为n阶方阵,如果 $A^2 = E$,则称A为对合矩阵.

正交矩阵

设A为n阶方阵,如果 $A^T A = A A^T = E$,则称A为正交矩阵.

对角矩阵

设A为n阶方阵,如果除了主对角线以外,其余元素全为零,则称A为对角矩阵.

上三角矩阵

主对角线以下的元素全为零的方阵称为上三角矩阵.

下三角矩阵

主对角线以上的元素全为零的方阵称为下三角矩阵.

伴随矩阵

行列式$|A|$的各元素的代数余子式A_{ij}所构成的方阵

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做方阵A的伴随矩阵.

伴随矩阵具有重要性质：$AA^* = A^*A = |A|E$.

１０　逆矩阵

定义 设A为n阶方阵,如果存在矩阵B,使

$$AB = BA = E$$

则称矩阵A是可逆的(或非奇异的、非退化的 、满秩的),且矩阵B称为A的逆矩阵.

若A有逆矩阵,则A的逆矩阵是唯一的 ,A的逆矩阵记作 A^{-1}.

上页 下页 返回

相关定理及性质

方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$.

若矩阵A可逆,则$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$.

$$(A^{-1})^{-1} = A; (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} (\lambda \neq 0);$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

若同阶方阵A与B都可逆,那么AB也可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

1 1　分块矩阵

矩阵的分块，主要目的在于简化运算及便于论证.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似.

典　型　例　题

- 一、矩阵的运算
- 二、逆矩阵的运算及证明
- 三、矩阵的分块运算

一、矩阵的运算

例 1　计算

$$\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}_{n\times n}^{2}$$

解

$$\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}_{n\times n}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \right]^{2}$$

上页 下页 返回

$$
= \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}^2
$$

$$
= \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n(n-1) & -n & \cdots & -n \\ -n & n(n-1) & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -n & \cdots & n(n-1) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\
-\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n}
\end{pmatrix}
$$

在此例中, $A^2 = A$,所以A是幂等矩阵.

上页 下页 返回

例２ 设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,试将$f(\lambda)=|\lambda E-A|$写成$\lambda$的多项式,并验证$f(A)=0$.

解

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc,$$

由此得

$$f(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$+ (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即$f(A)=0.$

上页 下页 返回

二、逆矩阵的运算及证明

例3　求$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$的逆矩阵.

解　方法一　用定义求逆阵

设　$A^{-1}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$,

由$A^{-1}A=E$,得

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则有$\begin{cases} a\,x_1+b\,x_3=1, \\ c\,x_1+d\,x_3=0, \\ a\,x_2+b\,x_4=0, \\ c\,x_2+d\,x_4=1. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x_1=\dfrac{d}{ad-bc}, \\ x_2=\dfrac{-b}{ad-bc}, \\ x_3=\dfrac{-c}{ad-bc}, \\ x_4=\dfrac{a}{ad-bc}. \end{cases}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

注　依定义求A的逆,实质上是求解n个系数相同而常数项分别为单位 矩阵的各列的n元方程组.

上页 下页 返回

方法二

求二阶矩阵逆矩阵可用 "两调一除 "的方法，其做法是：先将矩阵 A 中的主对角元素调换其 位置，再将次对角元素调换其 符号，最后用 $|A|$ 去除 A 的每一个元素，即可得 A 的逆矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, |A| = ad - bc.$$

上页 下页 返回

$$A \xrightarrow{\text{调换主对角元}} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{次对角元调符号}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{用}|A|\text{去除}} \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

注　此法仅适用于二阶矩阵，对二阶以上的矩阵不适用.

例4 解矩阵方程 $AX = B, XA = B, AXB = C$，其中 A、B 均为可逆矩阵.

分析 解矩阵方程时，应注意已知矩阵与 X 的位置关系.例如解 $AX = B$，要先考察 A 是否可逆 (这个过程可以不写出)，只有 A 可逆时才可解这个矩阵方程，这时将方程两边同时左乘 A^{-1}，得

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,\text{即} X = A^{-1}B,$$

而不能右乘 A^{-1}，因为矩阵的乘法不满足交换律.

上页 下页 返回

矩阵方程	解
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$

上页 下页 返回

三、矩阵的分块运算

例5 设A,B都是n阶可逆矩阵,证明$D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$必为可逆矩阵,并求$D$的逆矩阵.

证 因为$\det D=\det A\cdot\det B\neq 0(\because A,B$均可逆,$\det A\neq 0,\det B\neq 0)$,所以$D$为可逆矩阵.

设 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$,其中$X_{ij}$均为$n$阶矩阵$(i,j=1,2)$,

上页 下页 返回

$$D\cdot D^{-1}=\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}AX_{11}&AX_{12}\\CX_{11}+BX_{21}&CX_{12}+BX_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}(E\text{是}n\text{阶单位阵})$$

依矩阵相等的定义有 $\begin{cases}AX_{11}=E, AX_{12}=O,\\ CX_{11}+BX_{21}=O,\\ CX_{12}+BX_{22}=E,\end{cases}$

上页 下页 返回

从而得 $X_{11}=A^{-1},\quad X_{12}=O,$

$$X_{21}=-B^{-1}CA^{-1},\quad X_{22}=B^{-1},$$

故 $$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

同理可得:

设A、B均可逆,对分块矩阵 D:

(1)设$D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$,则 $D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$;

(2)设$D=\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$,则 $D^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$.

上页 下页 返回

例 6　设A,B,C,D都是n阶方阵,A是非奇异的,E是n阶单位阵,并且

$$X=\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$Z=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}.$$

(1)求乘积XYZ;

(2)证明:$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$

解 （1）根据分块矩阵的乘法，得

$$XYZ=\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

（2）由（1）可得

$$\because \left|XYZ\right| = \begin{vmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = \left|A\right| \cdot \left|D - CA^{-1}B\right|,$$

$$\left|XYZ\right| = \left|X\right|\left|Y\right|\left|Z\right|,$$

而 $\left|X\right| = \left|Z\right| = 1,$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left|A\right| \cdot \left|D - CA^{-1}B\right|.$$

上页 下页 返回

第二章　测试题

一、填空题(每小题4分，共32分).

1. 设A为n阶方阵，A^*为其伴随矩阵，$\det A=\dfrac{1}{3}$，则

$$\det\left(\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. 设3阶方阵$A\neq O$，$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&t\\3&5&3\end{pmatrix}$，且$AB=O$，则

$t=$________

3.已知$A^3=E$,则$A^{-1}=$________

4.矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&5&0\\8&0&0\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}=$________

5. 设4阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\-1&2&2&5\\2&-1&1&3\end{pmatrix}$

则A的逆矩阵 $A^{-1}=$______

上页 下页 返回

6. 若n阶矩阵A满足方程$A^2+2A+3E=0$,则

$A^{-1}=$________

7. 设A为三阶矩阵,且$|A|=1$,$|2A^{-1}+3A^*|=$________

8. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,则$A^n=$____________

二、(6分) 设A、B均为n阶方阵,且$B=B^2$,$A=E+B$,证明A可逆,并求其逆.

三、(6分) 设n阶实方阵$A \neq O$,且$A^* = A^T$,证明A可逆.

四、(8分) 解下列矩阵方程.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

五、(每小题5分，共20分) 求下列矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$，(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, \ 2)$;

上页 下页 返回

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}^n$; (4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

六、(6分) 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$, 求 B.

七、(每小题3分, 共6分) 设n阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明:

(1) 若 $|A|=0$, 则 $|A^*|=0$; (2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

上页 下页 返回

八、（每小题5分，共10分）求下列矩阵的逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-1&3&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\2&8&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&2&3&2\\2&3&3&1&1\end{pmatrix}.$$

九、（6分）设$P^{-1}AP=B$,求A^{11}.其中

$$P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

测试题答案

一、1.$(-1)^n 3$; 2.$t=4$; 3.A^2; 4.$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5.$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$;

6.$-\frac{1}{3}(A+2E)$;

7.125;　　8. $\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$

二、$A^{-1} = (B+E)^{-1} = E - \dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}(3E - A).$

四、$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

五、1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} E, & (n\text{为偶数}) \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & (n\text{为奇数}) \end{cases};$

上页 下页 返回

$$2.\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};\qquad 3.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

六、$B=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$

八、1. $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 4 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7/12 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 3 & -7/6 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -2 & 11/12 & 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$.

上页 下页 返回

九、$\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$.